Die Regula Falsi (Sekantennäherungsverfahren)

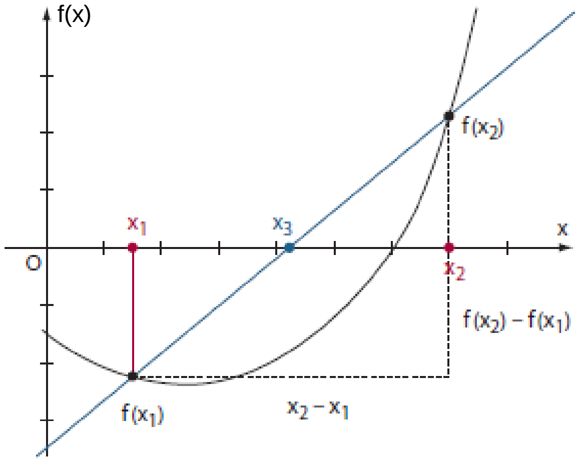
Arbeitsblatt

Die Regula falsi[1] (Sekantennäherungsverfahren)

Bei dieser Methode wird die Nullstelle einer Funktion schrittweise durch das Schneiden von Sekanten mit der x-Achse angenähert. Dieses Verfahren lässt sich in einen Algorithmus umsetzen, der für Taschenrechner oder Rechenprogramme genutzt werden kann. Auch hier ist zu beachten, dass die Funktion im gesamten Intervall $[x_1; x_2]$ definiert ist und dass der Graph in diesem Intervall fortlaufend (ohne Sprünge) gezeichnet werden kann.

Um die Nullstelle einer gegebenen Funktion mit der Regula falsi zu finden, gehe folgendermaßen vor:

– Wähle zwei Startwerte x_1 und x_2 so, dass die beiden Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ verschiedene Vorzeichen besitzen, z. B. ist $f(x_1)$ negativ und $f(x_2)$ positiv (oder umgekehrt).
Da die Funktion im betrachteten Intervall definiert ist und keinen Sprung macht, muss es in $[x_1; x_2]$ eine Nullstelle geben.

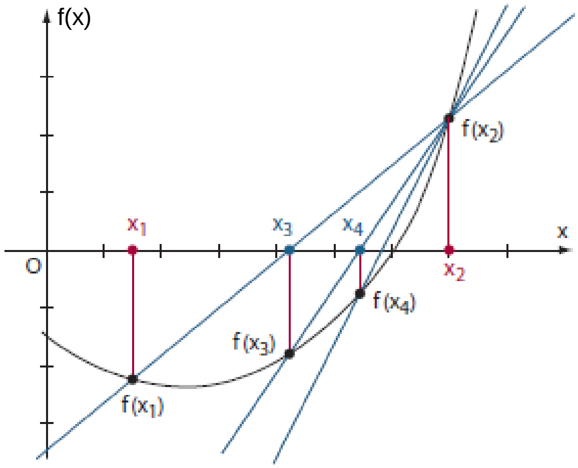


– Stelle die Sekante durch die Punkte $(x_1 | f(x_1))$ und $(x_2 | f(x_2))$ auf (siehe Aufgabe 237).
Gleichung der Sekante:
$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

– Der Schnittpunkt der Sekanten mit der x-Achse ergibt einen **Näherungswert** x_3 für die Nullstelle (siehe Aufgabe 237).

– $x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1)$

– x_3 wird nun selbst ein Startwert für die weitere Berechnung. Dabei ersetzt x_3 den Wert x_1, wenn $f(x_2)$ und $f(x_3)$ verschiedene Vorzeichen besitzen; oder x_3 ersetzt den Wert x_2, falls $f(x_1)$ und $f(x_3)$ verschiedene Vorzeichen haben.



▷ Ein schrittweises Verfahren, bei dem man mit einem eben berechneten Wert in dieselbe Rechenvorschrift wiederholt einsetzt, um damit einen weiteren genaueren Näherungswert (für die Lösung einer Gleichung) zu finden, nennt man **iteratives Verfahren** oder **Iteration**[2].

[1] *Regula falsi* (lat.) – die Regel des (vermeintlich) Falschen
[2] Ein bekanntes Beispiel für eine Iteration ist das Heron'sche Wurzelziehen zur Berechnung der Wurzel aus A mit der Iterationsvorschrift $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$.

© 2018 Verlag E. DORNER, Wien

Beispiel:
Berechne die Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ mit den Startwerten $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

Lösung:
$x_1 = 1;\ f(x_1) = -1$
$x_2 = 2;\ f(x_2) = 2$

$f(x_1)$ und $f(x_2)$ haben verschiedene Vorzeichen.
$x_3 = 1 - \frac{2-1}{2-(-1)} \cdot (-1) = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333;\ f(x_3) \approx -0{,}2222$

$f(x_2)$ und $f(x_3)$ haben verschiedene Vorzeichen, also ersetzt x_3 den Wert x_1.
$x_4 = 1{,}3333 - \frac{2-1{,}3333}{2-(-0{,}2222)} \cdot (-0{,}2222) \approx 1{,}4000;\ f(x_4) \approx -0{,}0400$

$f(x_2)$ und $f(x_4)$ haben verschiedene Vorzeichen, also ersetzt x_4 den Wert x_3.
$x_5 = 1{,}4000 - \frac{2-1{,}4000}{2-(-0{,}0400)} \cdot (-0{,}0400) \approx 1{,}4118$
Als Näherung für die gesuchte Nullstelle ergibt sich ein Wert von 1,4118.

Aufgaben

1 Bearbeite das interaktive Arbeitsblatt www Regula falsi.

2 Berechne mit der Regula falsi näherungsweise die Nullstelle der Funktion im angegebenen Intervall (3 Iterationsschritte).
a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 0{,}8$ in $[-1; 0]$
b) $f(x) = x^3 - 2x + 0{,}5$ in $[1; 2]$
c) $f(x) = x^3 + 3x - 7$ in $[1; 2]$

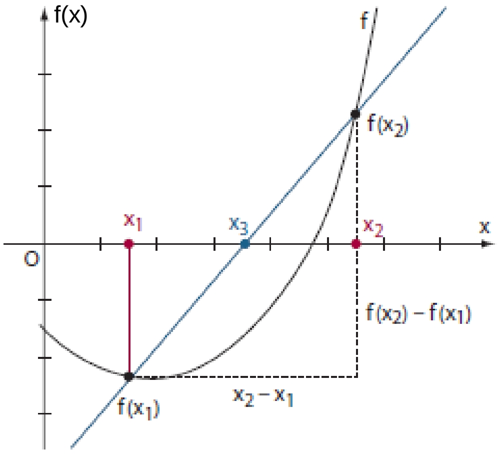
3 Bearbeite das Informationsblatt www Herleitung der Iterationsformel für die Regula falsi.

4 Löse die Gleichung näherungsweise mithilfe der Regula falsi, indem du die ersten drei Iterationsschritte durchführst. Um geeignete Startwerte für die Iteration zu finden, verschaffe dir zuerst einen ungefähren Überblick über den Verlauf des Graphen.
a) $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$
b) $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ (positive Lösung)
c) $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ (negative Lösung)
d) $x^5 - 4x^2 - 15 = 0$
e) $x^4 + 5x^2 - 3 = 0$ (positive Lösung)
f) $x^4 + 5x^2 - 3 = 0$ (negative Lösung)

5 Formuliere für deine Partnerin/deinen Partner eine Gleichung, die mit der Regula falsi zu lösen ist. Überprüft die ersten 3 Iterationsschritte mit dem interaktiven Arbeitsblatt www Regula falsi.

© 2018 Verlag E. DORNER, Wien

6 Stelle für die Herleitung der Regula falsi die Gleichung der Sekante durch die Punkte $(x_1 | f(x_1))$ und $(x_2 | f(x_2))$ auf. Lies dazu aus der Skizze die Steigung ab und setze mit dem Punkt $(x_2 | f(x_2))$ in die Geradengleichung $y = k \cdot x + d$ ein.
Berechne anschließend den Schnittpunkt der Sekante mit der x-Achse.
Welche Formel für den Näherungswert x_3 der Nullstelle erhältst du auf diese Art?
Zeige, dass die so berechnete Formel mit $x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1)$ äquivalent ist.



© 2018 Verlag E. DORNER, Wien
Dimensionen – Mathematik 6

Die Regula Falsi (Sekantennäherungsverfahren)

Lösungen

2 a) $-0{,}56$ b) $1{,}267$ c) $1{,}406$

4 a) $1{,}755$ b) $1{,}554$ c) $-1{,}554$ d) $1{,}984$ e) $0{,}736$ f) $-0{,}736$

6 $k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, Punkt $(x_1|f(x_1))$ in $y = k \cdot x + d$ einsetzen ergibt $d = f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot x_1$

$\Rightarrow y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot x + f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot x_1 = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

Schnittpunkt mit x-Achse:

$0 = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \Rightarrow -f(x_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = x - x_1 \Rightarrow x = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$

© 2018 Verlag E. DORNER, Wien