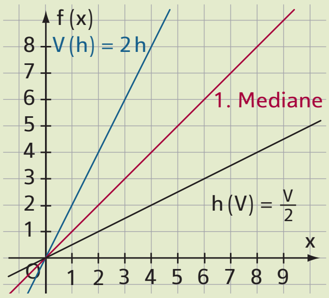
Umkehrfunktion einer linearen Funktion

Arbeitsblatt

Umkehrfunktion einer linearen Funktion

Beispiel:
In einem quaderförmigen Gefäß mit der Grundfläche $G = 2\,dm^2$ steht die Flüssigkeit bis zu einer Höhe h (in dm). Bei gegebener Grundfläche hängt das Flüssigkeitsvolumen V nur von der Höhe h ab.

- Jeder Höhe h wird ein Volumen V (h) zugeordnet: $V(h) = G \cdot h = 2h$
  Umgekehrt hängt die Höhe h vom Flüssigkeitsvolumen V ab.
- Jedem Volumen V wird eine Höhe h (V) zugeordnet: $h(V) = \frac{V}{G} = \frac{V}{2}$

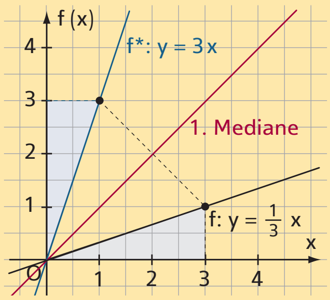


Die Funktion $h(V) = \frac{V}{2}$ ist die **Umkehrfunktion** der Funktion $V(h) = 2 \cdot h$.

Der Graph der Funktion $V(h) = 2 \cdot h$ geht aus dem Graphen der Funktion $h(V) = \frac{V}{2}$ durch **Spiegelung an der 1. Mediane** $f(x) = x$ hervor.

Satz

Sind zwei lineare Funktionen $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow A$ Umkehrfunktionen voneinander, dann liegen ihre Graphen **symmetrisch bezüglich der 1. Mediane**.

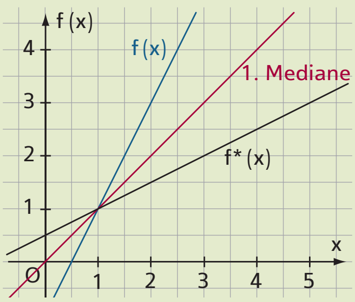


Um die **Umkehrfunktion** f* einer Funktion **punktweise** zu **zeichnen**, übertrage die Funktionswerte $f(x) = y$ in die Spalte der x-Werte und die ursprünglichen x-Werte in die Spalte der Funktionswerte der Umkehrfunktion $f^*(x) = y^*$.

Beispiel:
Stelle die lineare Funktion $f: y = 2x - 1$ und ihre Umkehrfunktion f*(x) grafisch dar.

Lösung:

x	f (x) = y	x	f* (x) = y*
1	1	1	1
2	3	3	2
3	5	5	3
4	7	7	4
5	9	9	5
6	11	11	6
…	…	…	…



▷ Um die Umkehrfunktion f* einer Funktion **rechnerisch** zu **finden**, ersetze in der Funktionsgleichung x durch y* sowie y durch x und forme so um, dass y* explizit auf einer Seite steht. Dieses Verfahren kannst du auf alle Funktionen anwenden, die umkehrbar sind.

▷ *Beispiel:*
Eine Gerade g geht durch den Punkt P (2|3) und hat die Steigung $k = -\frac{3}{2}$. Sie wird an der 1. Mediane gespiegelt. Es sollen die Gleichungen der Geraden g und ihrer gespiegelten Geraden g* angegeben werden.

Lösung:
Für die Gleichung von g wird in $g: y = k \cdot x + d$ der Punkt P sowie die Steigung k eingesetzt und d berechnet.
$g: y = k \cdot x + d$

$$3 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + d \Rightarrow 3 = -3 + d \Rightarrow d = 6 \Rightarrow g: y = -\frac{3}{2} \cdot x + 6$$

Um die gespiegelte Gerade g* zu erhalten, werden in der Gleichung der Geraden g die Variablen x durch y* sowie y durch x ersetzt und so umgeformt, dass y* explizit auf einer Seite steht.

$$g^*: x = -\frac{3}{2} \cdot y^* + 6 \qquad |-6$$
$$x - 6 = -\frac{3}{2} \cdot y^* \qquad \left|:\left(-\frac{3}{2}\right) \text{ bzw. } \cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\right.$$
$$\Rightarrow g^*: y^* = -\frac{2}{3} \cdot x + 4$$

Aufgaben

1 Bestimme die Umkehrfunktion f* rechnerisch und grafisch.
a) $y = -2x + 3$ b) $y = x$ c) $f(x) = \frac{4}{9}x + 7$ d) $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$

2 Bestimme die Umkehrfunktion f* rechnerisch und grafisch.
a) $f(x) = 11x - 4$ b) $f(x) = \frac{3}{5}x + 9$ c) $f(x) = 0{,}2x$ d) $f(x) = \frac{x}{2} - 3$
e) $f(x) = -3x + 3$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x - 5$ g) $f(x) = 1{,}6x$ h) $f(x) = 2{,}3x - 0{,}9$

3 Eine Gerade g durch den Punkt P und mit der Steigung k wird an der 1. Mediane gespiegelt. Gib die Gleichungen der Geraden g und ihrer gespiegelten Geraden g* an.
a) P(3|−4), k = 3 b) P(1|1), k = −2 c) P(0,5|−1), $k = -\frac{1}{3}$
d) P(−2|1), k = 0,7 e) P(15|−20), k = 4,5 f) P(−5|0), k = 0

4 Eine Gerade g durch A und B wird an der 1. Mediane gespiegelt. Gib die Gleichungen der Geraden g und ihrer gespiegelten Geraden g* an.
a) A(−5|−2), B(4|3) b) A(−3|2), B(4|−3)
c) A(−120|−232), B(150|139) d) A(−3,5|−1,2), B(4,2|3,7)
e) A(−1,6|2,9), B(4,1|−3,8) f) A(1|1), B(4|4)