Rechengesetze für Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{Q}$ (Beweis)

Arbeitsblatt

Manche der folgenden Regeln sind einfach zu beweisen, da sie mithilfe von Rechengesetzen und durch einfache Umformungen gezeigt werden können. Anhand von Regel (2) wird gezeigt, welche mathematischen Strategien beim Beweisen hilfreich sein können.

Satz

Für $a \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, s \in \mathbb{Z}$ gelten folgende Regeln zum Rechnen mit Wurzeln:

(1) $v \cdot \sqrt[r]{a^s} + w \cdot \sqrt[r]{a^s} = (v+w) \cdot \sqrt[r]{a^s}$

(2) $\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[s]{a} = \sqrt[rs]{a^{r+s}}$

(3) $\dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[rs]{a^{s-r}}$

(4) $\sqrt[r]{a \cdot b} = \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b}$

(5) $\sqrt[r]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}$

(6) $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[rs]{a}$

(7) $\sqrt[n \cdot r]{a^{n \cdot s}} = \sqrt[r]{a^s}$

Beweis zu Regel (2) $\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[s]{a} = \sqrt[rs]{a^{r+s}}$

Für den Beweis werden zwei typische mathematische Strategien benutzt:
- geschicktes Einsetzen (Trick) und
- Anwenden bzw. Rückführen auf bisher Bewiesenes.

Für den Beweis wird auf beiden Seiten der Gleichung a durch $x^{r \cdot s}$ ersetzt. Dieser Trick führt dazu, dass Potenzen mit ganzzahligen Exponenten auftreten und die entsprechenden Rechengesetze angewandt werden können.
Die beiden Seiten der Gleichung werden getrennt mithilfe der bisher bewiesenen Rechenregeln für Potenzen umgeformt und auf einen gemeinsamen Ausdruck – in diesem Fall x^{r+s} – gebracht.

Linke Seite:	$\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[s]{a}$
Ersetze a durch $x^{r \cdot s}$.	$= \sqrt[r]{x^{r \cdot s}} \cdot \sqrt[s]{x^{r \cdot s}}$
Wende die Definition $a^{\frac{s}{r}} = \sqrt[r]{a^s}$ an. Kürze die Brüche in den Exponenten.	$= x^{\frac{r \cdot s}{r}} \cdot x^{\frac{r \cdot s}{s}}$ $= x^s \cdot x^r$
Wende das Kommutativgesetz für die Multiplikation an.	$= x^r \cdot x^s$
Wende den Satz $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ an.	$= x^{r+s}$
Rechte Seite:	$\sqrt[r \cdot s]{a^{r+s}}$
Ersetze a durch $x^{r \cdot s}$.	$= \sqrt[r \cdot s]{\left(x^{r \cdot s}\right)^{r+s}}$
Wende den Satz $\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$ an.	$= \sqrt[r \cdot s]{x^{r \cdot s(r+s)}}$
Wende die Definition $a^{\frac{s}{r}} = \sqrt[r]{a^s}$ an. Kürze den Bruch im Exponenten.	$= x^{\frac{r \cdot s(r+s)}{r \cdot s}}$ $= x^{r+s}$

Somit gilt: $\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[s]{a} = \sqrt[rs]{a^{r+s}}$ qu.e.d. (quod erat demonstrandum)

© 2018 Verlag E. DORNER, Wien

Aufgaben

Beweise die Rechenregeln.

(1) $v \cdot \sqrt[r]{a^s} + w \cdot \sqrt[r]{a^s} = (v + w) \cdot \sqrt[r]{a^s}$

(3) $\dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[rs]{a^{s-r}}$

(4) $\sqrt[r]{a \cdot b} = \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b}$

(5) $\sqrt[r]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}$

(6) $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[rs]{a}$

(7) $\sqrt[n \cdot r]{a^{n \cdot s}} = \sqrt[r]{a^s}$

© 2018 Verlag E. DORNER, Wien