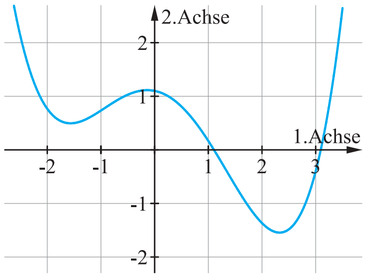
3.3 Linkskurve, Rechtskurve – Wendepunkte

Einführung

(1) Anschauliche Erklärung des Begriffs Wendepunkt

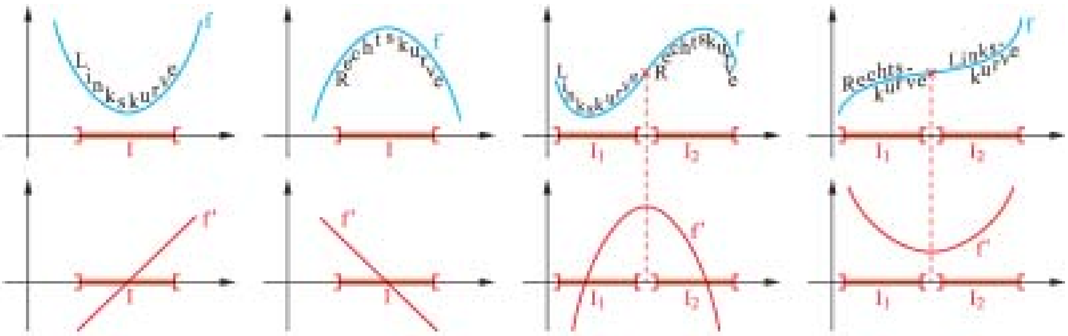
Bei Motorradrennen lässt sich beobachten, wie sich die Motorradfahrer beim Übergang von einer Linkskurve in eine Rechtskurve „einen Moment lang“ aus ihrer Schräglage aufrichten und geradlinig zur Fahrtrichtung fahren, bevor sie eine neue Schräglage einnehmen. Dieser Punkt, an dem eine Linkskurve in eine Rechtskurve bzw. eine Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht, heißt **Wendepunkt**.

In der Abbildung rechts ist ein Teilstück einer Grand-Prix-Rennstrecke für Motorradrennen (idealisiert) abgebildet.
Wie lässt sich die jeweilige momentane Fahrtrichtung des Fahrers veranschaulichen? Beschreibe die jeweilige Schräglage. Wo durchfährt der Fahrer eine Linkskurve, wo eine Rechtskurve? Wo liegt ein Wendepunkt?



(2) Mathematische Definition der Begriffe Wendepunkt sowie Rechts- und Linkskurve

Ein Wendepunkt einer Funktion trennt eine Rechtskurve von einer Linkskurve. Wir wollen die Begriffe Rechts- und Linkskurve mithilfe der Ableitung dieser Funktion präzisieren. Dazu betrachten wir die folgenden Funktionsgraphen und die Graphen ihrer jeweiligen Ableitungsfunktionen:



Durchlaufe die Graphen von f jeweils von links nach rechts. Betrachte dabei jeweils das Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion f' von f in den vorgegebenen Intervallen und versuche, die anschauliche Vorstellung von Rechts- bzw. Linkskurve mithilfe der 1. Ableitung von f zu definieren.
Definiere dann auch den Begriff Wendepunkt.

Definition 3

Gegeben ist eine im Intervall I differenzierbare Funktion f.

Der Graph dieser Funktion bildet im Intervall I eine
Linkskurve, | **Rechtskurve,**
falls die Ableitungsfunktion f′ im Intervall I
streng monoton wächst. | **streng monoton fällt.**
Man sagt: Der Graph von f ist
linksgekrümmt. | **rechtsgekrümmt.**

Ein Punkt, der Links- und Rechtskurve des Graphen einer differenzierbaren Funktion voneinander trennt, heißt **Wendepunkt** des Graphen von f.
Eine Stelle, an der der Graph von f einen Wendepunkt hat, heißt **Wendestelle**.

(3) Hinreichendes Kriterium für Links- bzw. Rechtskurve mittels der 2. Ableitung

Da das Krümmungsverhalten einer Funktion f über die Monotonieeigenschaft der 1. Ableitung f′ definiert ist, können wir die Aussage (3) des Monotoniesatzes (siehe S. 154) auf die Funktion f′ anwenden. Dabei ergibt sich: Wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist die Funktion f′ im Intervall I streng monoton wachsend.
Entsprechend gilt: Wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$, dann ist die Funktion f′ im Intervall I streng monoton fallend. Daraus folgt unmittelbar der folgende Satz:

Satz 7: *Hinreichendes Kriterium für eine Links- bzw. Rechtskurve mittels der 2. Ableitung*

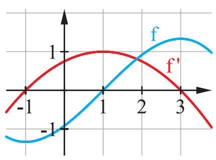
Ist f eine im Intervall I zweimal differenzierbare Funktion, so gilt:

Wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist, | *Wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$ ist,*
dann bildet der Graph der Funktion f im Intervall I eine
Linkskurve. | *Rechtskurve.*

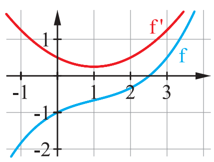
(4) Notwendiges bzw. hinreichendes Kriterium für Wendestellen

An einer Wendestelle einer Funktion f geht der Graph von f von einer Links- in eine Rechtskurve über oder umgekehrt von einer Rechts- in eine Linkskurve. Das hat folgende Bedeutung für die Wendestelle:

1. Fall: *Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve:*
Die 1. Ableitung f′ geht von streng monotonem Wachsen in streng monotones Fallen über. Der Graph von f′ hat an der Wendestelle von f einen Hochpunkt.



2. Fall: *Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve:*
Die 1. Ableitung f′ geht von streng monotonem Fallen in streng monotones Wachsen über. Der Graph von f′ hat an der Wendestelle von f einen Tiefpunkt.



Wenden wir die Kriterien für relative Extremstellen auf die Ableitungsfunktion f′ an, so erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 8: *Kriterien für Wendestellen*

(a) *Notwendige Kriterien für Wendestellen*

(1) Wenn x_w eine Wendestelle von f ist, dann ist x_w eine Extremstelle von f'.

(2) Ist die Funktion f an der Stelle x_w zweimal differenzierbar, so gilt:
Wenn x_w eine Wendestelle der Funktion f ist, dann ist $f''(x_w) = 0$.

(b) *Hinreichende Kriterien für Wendestellen*

Kriterium mittels Vorzeichenwechsel von f'' bei x_w

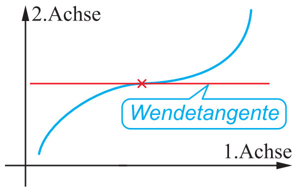
(1) Ist die Funktion f in einer Umgebung der Stelle x_w zweimal differenzierbar, so gilt:
Wenn $f''(x_w) = 0$ und f'' an der Stelle x_w einen Vorzeichenwechsel hat, dann ist x_w Wendestelle der Funktion f.

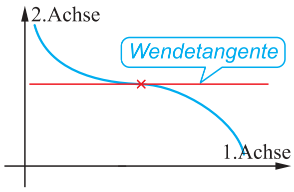
Kriterium mittels $f'''(x_w) \neq 0$

(2) Ist die Funktion f in einer Umgebung der Stelle x_w dreimal differenzierbar, so gilt:
Wenn $f''(x_w) = 0$ und zugleich $f'''(x_w) \neq 0$ gelten, dann ist x_w Wendestelle von f.

(5) Sattelpunkte als spezielle Wendepunkte

Bereits im Unterkapitel 3.1 haben wir Sattelpunkte kennen gelernt als Punkte mit waagerechter Tangente, die weder Hoch- noch Tiefpunkte sind.
Jetzt können wir dies präzisieren:





Definition 4

Ein **Sattelpunkt** ist ein Wendepunkt mit einer zur 1. Achse parallelen Tangente.

Eine Funktion hat also an den Stellen x_w genau dann einen Sattelpunkt, wenn x_w Wendestelle und zusätzlich $f'(x_w) = 0$ ist.

Aufgabe 1 *Bestimmen der Wendepunkte eines Funktionsgraphen mithilfe der Kriterien*

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6x^5 - 21x^4 + 4x^3$.
Bestimme die Wendepunkte des Graphen von f. Überprüfe das Ergebnis gegebenenfalls mithilfe eines GTR.

Lösung *(1) Bestimmen möglicher Wendestellen mithilfe eines notwendigen Kriteriums*

$f(x) = 6x^5 - 21x^4 + 4x^3$ $\qquad f'(x) = 30x^4 - 84x^3 + 12x^2$

$f''(x) = 120x^3 - 252x^2 + 24x$ $\qquad f'''(x) = 360x^2 - 504x + 24$

Nach dem notwendigen Kriterium (2) von Satz 8 für Wendestellen liegen diese höchstens dort, wo die 2. Ableitung gleich 0 ist, also an den Stellen x mit
$f''(x) = 12x(10x^2 - 21x + 2) = 0$.

Diese Gleichung hat die Lösungen 0, $\frac{1}{10}$ und 2.

Ergebnis: Höchstens an den Stellen 0, $\frac{1}{10}$ und 2 können Wendestellen von f liegen.

(2) Mithilfe hinreichender Kriterien entscheiden, ob an den möglichen Stellen Wendepunkte vorliegen

Wir wenden eines der hinreichenden Kriterien (b)(1) und (b)(2) aus Satz 8 an:

Lösen mithilfe von f'''	*Lösen mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums von f''*
Es gilt: $f'''(0) = 24 \neq 0$ $f'''\left(\frac{1}{10}\right) = -22{,}8 \neq 0$ $f'''(2) = 456 \neq 0$	Es gilt: $f''(x) = 120x^3 - 252x^2 + 24x$ $= 120x \cdot (x-2) \cdot \left(x - \frac{1}{10}\right)$ siehe auch Seite 62 Da alle drei Nullstellen von f'' einfache Nullstellen sind, hat f'' an den Stellen 0; $\frac{1}{10}$ und 2 jeweils einen Vorzeichenwechsel.

Ergebnis: An den Stellen 0, $\frac{1}{10}$ und 2 liegen Wendepunkte vor.

(3) Bestimmen der Koordinaten der Wendepunkte

Es ist $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{49}{25\,000} = 0{,}00196$ und $f(2) = -112$.

Ergebnis:
Wendepunkte des Graphen von f sind $W_1(0\,|\,0)$, $W_2\left(\frac{1}{10}\,\middle|\,\frac{49}{25\,000}\right)$ und $W_3(2\,|\,-112)$.

(4) Entscheiden, ob einer der Wendepunkte ein Sattelpunkt ist

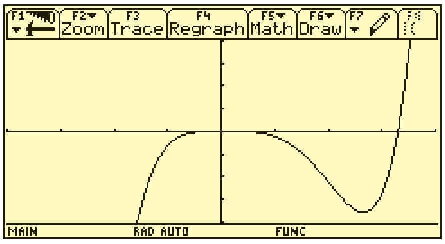
Es ist $f'(0) = 0$, $f'\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{39}{1\,000} \neq 0$ und $f'(2) = -144 \neq 0$.

Ergebnis:
Der Wendepunkt $W_1(0\,|\,0)$ ist auch ein Sattelpunkt.

GTR *(5) Überprüfung mithilfe eines GTR*

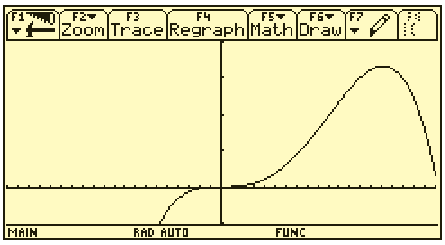
Ein erster Überblick über den Graphen von f stellt nicht alle Wendepunkte deutlich heraus: Lediglich der Wendepunkt an der Stelle 2 ist deutlich erkennbar.
Man gewinnt den falschen Eindruck, dass der Punkt $O(0\,|\,0)$ ein Hochpunkt sein könnte.

$-4 \leq x \leq 4;$
$-200 \leq y \leq 200$



Daher zoomen wir das Bild in der Nähe des Ursprungs $O(0\,|\,0)$. Nunmehr sind der Sattelpunkt an der Stelle 0 und der Wendepunkt an der Stelle $\frac{1}{10}$ erkennbar.
Dafür ist der Wendepunkt $W_3(2\,|\,-112)$ aus dem Blickfeld verschwunden.

$-0{,}2 \leq x \leq 0{,}2;$
$-0{,}001 \leq y \leq 0{,}004$



Weiterführende Aufgaben

2. *Notwendige bzw. hinreichende Kriterien für einen Sattelpunkt*

a) Gib ein notwendiges Kriterium für einen Sattelpunkt an.

b) Gib ein hinreichendes Kriterium für einen Sattelpunkt an.

c) Wende die Kriterien bei der Bestimmung des Sattelpunktes des Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$ an.

3. *Umkehrung der notwendigen bzw. hinreichenden Kriterien für Wendestellen*

a) Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass das notwendige Kriterium (a)(2) aus Satz 8 für Wendestellen nicht hinreichend ist.

b) Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass das hinreichende Kriterium (b)(2) aus Satz 8 für Wendestellen nicht notwendig ist.

Nicht jeder Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ mit $f'(x_0) = 0$, der kein Extrempunkt ist, ist schon ein Sattelpunkt.

4. *Nicht immer folgt aus $f'(x_0) = 0$, dass x_0 Extremstelle oder Sattelstelle ist.*

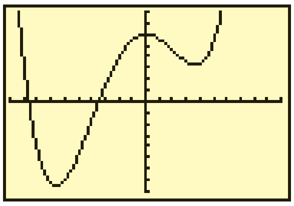
Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Zeige, dass $f'(0) = 0$ ist und dass der Punkt $O(0 \mid 0)$ weder ein Extrempunkt noch ein Sattelpunkt von f ist.

5. *Bestimmen der Wendepunkte einer Funktion mithilfe eines GTR oder CAS*

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{100}\left(x^4 + 4x^3 - 48x^2 + 600\right)$.

a) Mithilfe eines GTR erhält man die nebenstehende Darstellung des Graphen von f.
Welche Informationen lassen sich dem Graphen über die Existenz von Wendepunkten entnehmen? Stelle Vermutungen über die Lage der Wendepunkte auf.



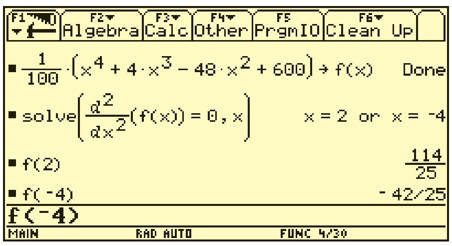
$-10 \le x \le 10$; $-8 \le y \le 8$

b) Begründe, dass die Funktion f genau zwei Wendepunkte hat.

c) Berechne alle Wendepunkte von f. Gehe dabei wie folgt vor:

GTR *(1) Wendepunkte mit einem GTR bestimmen*
Zeichne die Graphen von f und von f′ mithilfe eines GTR. Bestimme über die Befehle **Minimum** bzw. **Maximum** die Extrempunkte von f′ (siehe hierzu auch Aufgabe 6 auf Seite 147). Berechne anschließend die Koordinaten der Wendepunkte mit dem GTR. Überprüfe mit einem GTR auch den Vorzeichenwechsel bei $f''(x_e)$.

CAS *(2) Wendepunkte mit einem CAS bestimmen*
Im Rechner-Fenster rechts ist gezeigt, wie man mithilfe eines CAS die Wendestellen und die Koordinaten der Wendepunkte berechnen kann. Beschreibe das Verfahren und führe es selbst mit einem CAS durch.
Überprüfe mit einem CAS auch das Kriterium $f'''(x_e) \neq 0$.



Information **Hinreichendes Kriterium für Wendestellen mittels der ersten von null verschiedenen Ableitung ungerader Ordnung**

Das hinreichende Kriterium mittels der 3. Ableitung für Wendestellen versagt bei den Funktionen f mit $f(x) = x^5$, $f(x) = x^7$, ...

Es gibt ein entsprechendes Kriterium zu Satz 6 auf Seite 164. Es gilt:

Satz 9: *Hinreichendes Kriterium für Wendestellen mittels $f^{(k)}(x_w) = 0$ für $k < n$ und $f^{(n)}(x_w) \neq 0$*

Ist die Funktion f in einer Umgebung U von x_w n-mal $(n > 2)$ differenzierbar, so gilt:

Wenn n ungerade ist und $f'(x_w) = f''(x_w) = \ldots = f^{(n-1)}(x_w) = 0$ und zugleich $f^{(n)}(x_w) \neq 0$ ist, dann hat der Graph an der Stelle x_w einen Wendepunkt.

Für $n \geq 3$ liegt dann an der Stelle x_w ein Sattelpunkt vor.

Übungsaufgaben

6.

Bestimme die Intervalle, in denen der Graph der Funktion f eine Linkskurve bzw. eine Rechtskurve bildet.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

d) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^4$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin(x)$

f) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}\cos(x)$

g) $f(x) = x^5 - 4x^3$

h) $f(x) = x^5$

i) $f(x) = (x-1)^3$

j) $f(x) = x^5 - x^3 - 2x$

k) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 9x^3 + 48x^2 + 3x - 1$

l) $f(x) = x^4 + 3x^3 + \frac{15}{8}x^2 - 2x + 2$

7.

Bestimme die Intervalle, in denen der Graph von f eine Linkskurve [Rechtskurve] bildet.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0 \\ x^3 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right|$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x > 0 \\ x^3 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{1}{3}|x|^3 - 2|x|$

8. *Stelle mit $f''(x) = 0$ ohne Extrem- oder Wendepunkt des Funktionsgraphen*

Untersuche die Funktion mit $f(x) = x^4 - 4x$ auf relative Extremstellen und Wendestellen. Begründe, warum der Graph der Funktion f an der Stelle 0 trotz $f''(0) = 0$ keinen Wendepunkt hat. Untersuche dazu auch die Monotonie von f'' und zeige so, dass f' dort auch keine Extremstelle hat.

9. *Links- und Rechtskurve bei Geraden*

Ist eine Gerade eine Rechtskurve oder eine Linkskurve oder keines von beiden? Begründe.

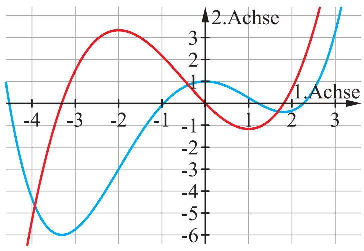
10.

Eine Funktion f hat an der Stelle x_e eine Tangente parallel zur 1. Achse und der Graph bildet in einem Intervall, in dessen Innerem x_e liegt, eine Linkskurve [Rechtskurve]. Welche besondere Stelle ist x_e?

11.
Bestimme die Wendepunkte des Graphen der Funktion f. Gib an, ob ein Minimum oder ein Maximum der Steigung vorliegt. Prüfe auch, ob Sattelpunkte vorliegen.

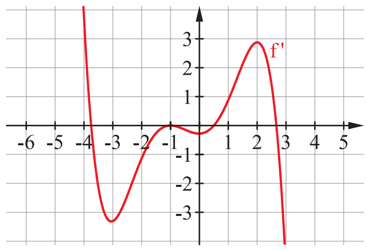
a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$
b) $f(x) = 2x + 1$
c) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2$
d) $f(x) = x^4 + 3x$
e) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$
f) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$
g) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 7$
h) $f(x) = x^6 + x^4 + 2x + 1$
i) $f(x) = 2x^2 - \cos(x)$
j) $f(x) = 2\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$
k) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 3 + \sin(x)$
l) $f(x) = \left|\frac{1}{4}x^3 - 2x^2\right|$

12.
In der nebenstehenden Abbildung sind der Graph der Funktion f sowie der Graph der 1. Ableitung f′ dargestellt.
Ordne die Graphen f bzw. f′ zu und lies näherungsweise die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von f ab.



13.
In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der 1. Ableitung f′ einer Funktion f dargestellt.

a) Gib an, an welchen Stellen die Funktion f Extrempunkte bzw. Wendepunkte hat.
b) Der Graph der Ausgangsfunktion f verläuft durch den Koordinatenursprung. Skizziere den Graphen von f.



14.
Von einer Funktion f ist die zweite Ableitung f″ bekannt. Was lässt sich über Wendepunkte und Extrempunkte von f aussagen? Skizziere einen möglichen Verlauf des Funktionsgraphen.

a) $f''(x) = -x + 1$
b) $f''(x) = x^2 - 1$

15.
a) Der Funktionsgraph einer ganzrationalen Funktion f ist symmetrisch zum Koordinatenursprung $O(0\,|\,0)$.
Begründe, dass f an der Stelle 0 einen Wendepunkt hat.
b) Begründe, dass jede ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad mindestens einen Wendepunkt hat.

16.
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 12ax^2 + 6x + 4$ mit $a \in \mathbb{R}$.
Bestimme a so, dass die Funktion f zwei Wendepunkte [keinen Wendepunkt] hat.

17.
Skizziere den Graphen einer Funktion, die genau folgende charakteristische Punkte besitzt:

a) einen Wendepunkt, keinen Extrempunkt

b) einen Wendepunkt, einen relativen Hochpunkt und einen relativen Tiefpunkt

c) einen Wendepunkt, einen relativen Hochpunkt und keinen relativen Tiefpunkt

d) drei [zwei] Wendepunkte, keinen relativen Extrempunkt

e) zwei relative Tiefpunkte, einen relativen Hochpunkt, zwei Wendepunkte

f) einen relativen Tiefpunkt, keinen relativen Hochpunkt, zwei Wendepunkte

18.
Bestimme die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f. Gib die Gleichungen der Wendetangenten an und skizziere mit ihrer Hilfe den Graphen von f.

a) $f(x) = x^3 + 3x + 4$ **c)** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5$ **e)** $f(x) = x^3 - 2x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + 2x^2 + 5$ **d)** $f(x) = x^5 - \frac{10}{3}x^3 - 1$ **f)** $f(x) = -\frac{1}{6}|x|^3 + x^2 - 1$

GTR **19.**
Zeichne mithilfe eines GTR den Graphen von f und bestimme die Wendepunkte von f. Begründe die Anzahl der Wendepunkte.

a) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 4$ **c)** $f(x) = x^5 - \frac{10}{3}x^3 - \frac{20}{3}x^2$

b) $f(x) = 3x^5 + 10x^4 - 60x - 120$ **d)** $f(x) = 0{,}2x^5 - 0{,}425x^4 - 2{,}5x^2 + 8{,}5x - 6$

20.
Die Kostenfunktion K eines Betriebes ist gegeben durch:
$K(x) = \frac{1}{5000}x^3 - \frac{1}{50}x^2 + 4x + 200$
Die Grenzkostenfunktion ist die 1. Ableitung der Kostenfunktion.

a) Nimm Stellung zu folgender Aussage: „Die Grenzkosten geben an, um welchen Betrag sich die Gesamtkosten $K(x)$ erhöhen, wenn die Produktionsmenge x um eine Einheit erhöht wird.“

b) Bestimme das Minimum der Grenzkosten.

c) Die durchschnittlichen Stückkosten sind gegeben durch $\frac{K(x)}{x}$. Für welches x sind die durchschnittlichen Stückkosten minimal? Vergleiche mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe b). Stelle gegebenenfalls die Grenzkostenfunktion und die Durchschnittskostenfunktion mithilfe eines GTR oder eines CAS dar.

21.
Gute oder schlechte Nachrichten? Erläutere die Aussagen mithilfe des Begriffs Wendepunkt anhand typischer Funktionsgraphen.