2 Gelöste Mathe-Maturen mit Erklärungen

Darum geht's in diesem Kapitel:

Mit diesen ausgearbeiteten Matura-Aufgaben samt Erklärung der Strategien und Lösungswege kannst du dich optimal vorbereiten. Probiere es selbst und vergleiche deine Arbeit mit der Lösung.

Das lernst du bei jeder Matura-Musterlösung:

1 Welche Strategie kann ich anwenden?
2 Wie sieht der mathematische Lösungsweg aus?
3 Wie kann ich den Lösungsweg verstehen?
4 Wie kann ich bei Bedarf noch nachlernen?

Österreichs Lernservices
für Schule und
Berufsbildung
lernenwillmehr.at

1 Das war die Matura vom 8. Mai 2019

LINK
Matura gesamt
Schau dir hier die ganze Matura vom 8. Mai 2019 an!

Haupttermin

1 Die Adria-Wien-Pipeline

SRDP

Matura vom 8. Mai 2019

Die Adria-Wien-Pipeline

Österreich muss einen Großteil seines Erdölbedarfs durch Importe von Rohöl decken. Diese Importe werden vorwiegend über die Adria-Wien-Pipeline durchgeführt, die von Triest nach Wien-Schwechat führt.

a) Die folgende Tabelle gibt die nach Österreich importierten Rohölmengen in den Jahren 2006 bis 2014 an:

Jahr	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
importierte Rohölmenge in Millionen Tonnen	7,7	7,6	7,9	7,4	6,8	7,3	7,4	7,8	7,5

Quelle: https://www.wko.at/branchen/industrie/mineraloelindustrie/jahresberichte.html [22.11.2018].

1) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der importierten Rohölmengen für diesen Zeitraum in Millionen Tonnen. *[1 Punkt]*

Strategie: Das arithmetische Mittel und die Standardabweichung einer Liste von Zahlen soll ermittelt werden. Dazu verwendest du am besten die Statistikfunktion deines Taschenrechners.

Kommentierte Lösung a) 1)

Lösungsweg

Berechnung mit Technologie ergibt (auf zwei Stellen gerundet):
Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 7{,}49$ Mio. t
Standardabweichung: $s = 0{,}31$ Mio. t

Kommentar

(Auch die Stichprobenstandardabweichung $s_{n-1} = 0{,}33$ Mio. t wird als richtig gewertet.)

Die Aufgabe kann auch mit der Hand gelöst werden:

Lösungsweg

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \cdot (7{,}7 + 7{,}6 + 7{,}9 + 7{,}4 + 6{,}8 + 7{,}3 + 7{,}4 + 7{,}9 + 7{,}5)$$
$$= 7{,}49$$

$$V = \frac{1}{9} \cdot \left((7{,}7 - 7{,}49)^2 + (7{,}6 - 7{,}49)^2 + \ldots + (7{,}5 - 7{,}49)^2\right)$$
$$= 0{,}0943$$

$$s = \sqrt{V} = \sqrt{0{,}0943} = 0{,}31$$

Kommentar

Der Mittelwert ist die Summe aller Werte dividiert durch die Anzahl.

Die Varianz ist der Mittelwert aller Terme $(x_i - \bar{x})^2$.

Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz.

MATURAWISSEN

Das benötigte Vorwissen für diese Aufgabe ist:

Das arithmetische Mittel ausrechnen	**Statistische Maßzahlen**	**Kapitel 9, LE 1.2**
Standardabweichung und Varianz berechnen	**Statistische Maßzahlen**	**Kapitel 9, LE 1.2**

LINK
Arbeitsblatt
Übungsaufgaben zum arithmetischen Mittel und zur Standardabweichung

SRDP

Matura vom 8. Mai 2019

b) Modellhaft betrachtet ist die Pipeline ein Drehzylinder mit dem Durchmesser d und der Höhe l.

Der Innendurchmesser der Pipeline beträgt $d = 457{,}2$ mm. Die Länge der Pipeline beträgt rund $l = 416$ km.

In der Erdölindustrie wird für das Volumen von Rohöl häufig die Einheit *Barrel* verwendet.
Es gilt: 1 Barrel $\approx 0{,}159\ m^3$

1) Berechnen Sie, wie viele Barrel Rohöl die vollständig befüllte Pipeline fasst. *[2 Punkte]*

Strategie: Bei dieser Aufgabe muss das Volumen der Pipeline berechnet und in Barrel umgewandelt werden. Dazu verwenden wir die Formel für das Volumen eines Drehzylinders:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Kommentierte Lösung b) 1)

Lösungsweg

Volumen der Pipeline:

$$V = \left(\frac{0{,}4572}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 416000 = 68296{,}1\ m^3$$

In Barrel:

$$\frac{68296{,}1}{0{,}159} = 429535$$

Kommentar

Alle Angaben müssen in dieselbe Einheit umgerechnet werden, am besten in Meter: d = 0,4572 m, h = 416000 m

Der Radius ist die Hälfte des Durchmessers.

Weil 1 Barrel etwa $0{,}159\ m^3$ sind.

Die Pipeline fasst 429.535 Barrel Rohöl.

MATURAWISSEN

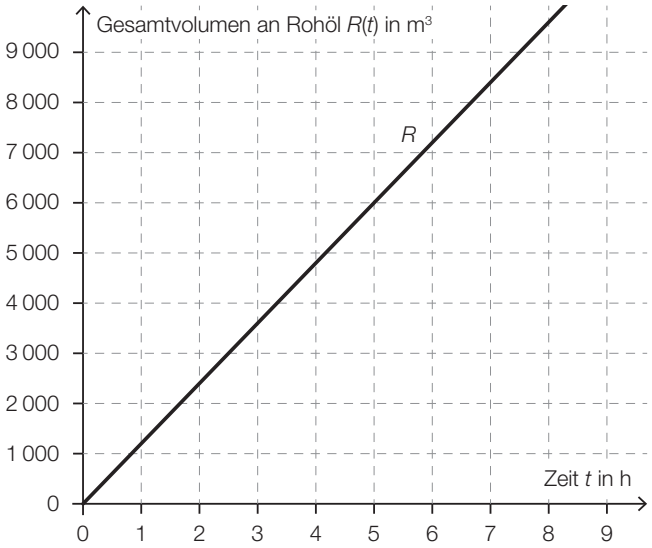
Um diese Aufgabe lösen zu können sind nur mathematische Fertigkeiten aus der Unterstufe notwendig: Das Volumen vom einem Drehzylinder musst du ausrechnen können und verschiedene Einheiten musst du in einander umrechnen können.

Das Volumen von Körpern ausrechnen	**Elementare Geometrie**	**Kapitel 10, LE 4**
Einheiten in einander umrechnen	**Maßeinheiten und Maßzahlen**	**Kapitel 10, LE 2**

LINK
Arbeitsblatt
Übungsaufgaben zu elementarer Geometrie, Maßeinheiten und Maßzahlen

SRDP

c) Das Gesamtvolumen an Rohöl, das im Zeitintervall [0; t] einen Kontrollpunkt in der Pipeline passiert, kann näherungsweise durch die Funktion R in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden. Der Graph der Funktion R ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



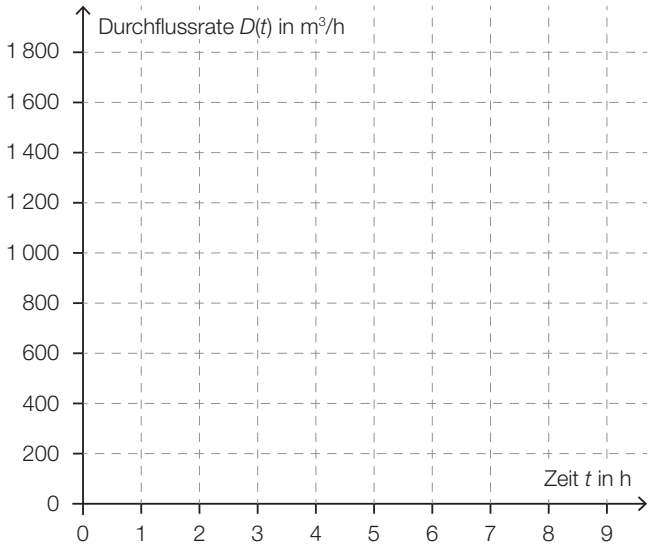
1) Erstellen Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen eine Gleichung der Funktion R.

[1 Punkt]

Die Durchflussrate $D(t)$ zum Zeitpunkt t ist die momentane Änderungsrate der Funktion R.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Durchflussrate ein.

[1 Punkt]



Strategie: Hier soll beim ersten Punkt die Gleichung einer Funktion mithilfe des Graphen erstellt werden. Aus der Abbildung erkennen wir, dass es sich um eine lineare Funktion handelt, sie ist also von der Form $R(t) = k \cdot t + d$. Der Graph geht durch den Koordinatenursprung, das heißt, $d = 0$, und daher $R(t) = k \cdot t$. Es reicht also, die Koordinaten eines zweiten Punkts abzulesen.

Beim zweiten Punkt sollst du den Graphen der momentanen Änderungsrate der Funktion R in ein Koordinatensystem einzeichnen. Die momentane Änderungsrate einer Funktion ist ihre erste Ableitung.

Kommentierte Lösung c) 1)

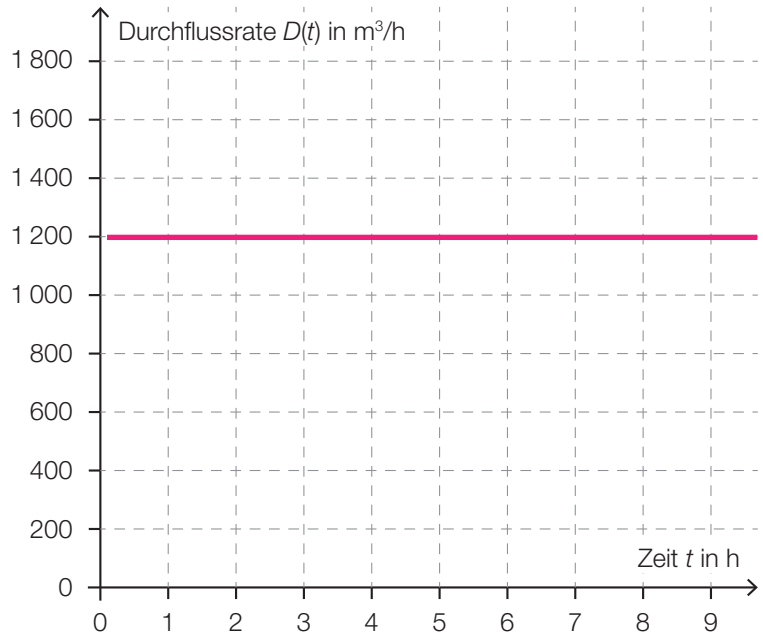
Lösungsweg	Kommentar
$k = \frac{6000 - 0}{5 - 0} = 1200$	Wähle immer Punkte mit ganzzahligen Koordinaten $P_1(0 \mid 0)$ und $P_2(5 \mid 6000)$. Von P_1 nach P_2 gehst du 5 nach rechts und 6000 hinauf. Für k brauchst du nur 1 nach rechts und daher nur $\frac{6000}{5}$ hinauf. Alternativ nimmst du die Formel: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$\mathbf{R(t) = 1200 \cdot t}$	Damit haben wir $R(t)$ bestimmt weil $d = 0$.

Die Funktionsgleichung für R(t) besagt, dass pro Stunde 1200 m^3 Rohöl durch die Pipeline fließen.

Kommentierte Lösung c) 2)

Lösungsweg	Kommentar
$D(t) = R'(t) = 1200$	Da R eine lineare Funktion ist, ist die erste Ableitung (grafisch der Anstieg der Funktion an einer bestimmten Stelle) konstant. Der Graph von D ist also parallel zur horizontalen Achse.

Hier ist dann der Graph von D:



MATURAWISSEN

Das benötigte Wissen für diese Aufgabe ist:

Funktionsvorschrift einer linearen Funktion bestimmen.	**Lineare Funktionen**	**Kapitel 2, LE 3.2**
Eine lineare Funktion differenzieren.	**Differenzieren, Ableitungsregeln.**	**Kapitel 7, LE 1.2**

LINK
Arbeitsblatt
Übungsaufgaben zu linearen Funktionen

2 Vitamin C

SRDP

Matura vom 8. Mai 2019

Vitamin C

a) Der Vitamin-C-Gehalt eines Apfels nimmt nach der Ernte exponentiell ab. Alle 4 Wochen nimmt der Vitamin-C-Gehalt um 20 % bezogen auf den Wert zu Beginn dieser 4 Wochen ab. Ein bestimmter Apfel hat bei der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von 18 mg.

Der Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels in Milligramm soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Ernte. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie den Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels 36 Wochen nach der Ernte. *[1 Punkt]*

Strategie: Bei Punkt 1 soll die Gleichung einer Exponentialfunktion aufgestellt werden. Die allgemeine Form einer exponentiellen Abnahmefunktion lautet:

$N(t) = N_0 \cdot a^t$ oder $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$.

Wir haben zwei Informationen:

- Der Anfangswert N_0 (Vitamin-C-Gehalt zum Zeitpunkt $t = 0$) beträgt 18 mg.
- Alle 4 Wochen nimmt der Vitamin-C-Gehalt um 20 % ab.

Wir wissen also $N(0) = N_0$ und $N(4)$, und berechnen a

Bei Punkt 2 soll der Wert dieser Funktion zum Zeitpunkt $t = 36$ berechnet werden.

Kommentierte Lösung a) 1)

Lösungsweg	Kommentar
$N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $N_0 = 18$	Einsetzen der Angabe.
$N(4) = 0{,}8 \cdot 18 \Rightarrow 18 \cdot a^4 = 0{,}8 \cdot 18$	Abnahme um 20 % entspricht einer Multiplikation mit 0,8 (es sind noch 80 % übrig)
$a = \sqrt[4]{0{,}8} = 0{,}9457$	a berechnen
$N(t) = 18 \cdot 0{,}9457^t$	**Die gesuchte Funktionsgleichung N(t).**