Kapitel 14: Reihen

Reihe
Ist $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^+$ eine Folge, so entsteht durch die Teilsummen (Partialsummen) $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ eine neue Folge $\langle s_n \rangle$, die **Partialsummenfolge** oder **Reihe**.
Zur Abkürzung der Schreibweise wird das Summenzeichen Σ verwendet:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Beispiel:

Die angeführten Summanden sind Elemente einer Folge $\langle a_n \rangle$. Bestimme das Bildungsgesetz und schreibe die gegebene Addition mithilfe des Summenzeichens an.

zu a)
Da es sich um die ungeraden Zahlen handelt, lautet das Bildungsgesetz für die Folge $a_n = 2n - 1$. Es wird die Summe der ersten elf Elemente dieser Folge gebildet und somit erhält man:

$$s_{11} = \sum_{k=1}^{11} (2k - 1)$$

Arithmetische Reihe
Ist $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ eine arithmetische Folge mit $a_n = a_1 + (n-1) \cdot k$ bzw. $a_n = a_0 + n \cdot k$, so nennt man die durch die Partialsummen gebildete Folge $\langle s_n \rangle$ eine **arithmetische Reihe**.

Summenformel einer arithmetischen Reihe
Für eine arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ mit $a_n = a_1 + (n-1) \cdot k$ kann jedes Element der Folge $\langle s_n \rangle$ folgendermaßen berechnet werden:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1) \cdot k) \cdot n}{2} = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot k)$$

Beispiel:

Berechne die Summe aller vierstelligen Zahlen, die durch 4 teilbar sind.
Die kleinste vierstellige Zahl, die durch 4 teilbar ist, ist 1000 : 4 = 250, die größte 9996 : 4 = 2499.
Zur Bestimmung der Anzahl der Zahlen verwenden wird das Bildungsgesetz der arithmetischen Folge in der Form 9996 = 1 000 + (n – 1)·4 → 8996 = (n – 1)·4 → 2249 = n – 1 → n = 2250
Jetzt können wir daher mittels der Summenformel berechnen:

$$s_{2250} = \frac{2250}{2} \cdot (a_1 + a_{2250}) = \frac{2250}{2} \cdot (1000 + 9996) = 12\,370\,500$$

Geometrische Reihe
Ist $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ eine geometrische Folge mit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (bzw. $a_n = a_0 \cdot q^n$), so nennt man die durch die Partialsummen gebildete Folge $\langle s_n \rangle$ eine **geometrische Reihe**.

Summenformel einer geometrischen Reihe
Für eine geometrische Folge $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ mit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ kann jedes Element der Folge $\langle s_n \rangle$ berechnet werden durch:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_1 \cdot q^i = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Konvergente und divergente Reihen
Eine Reihe $\langle s_1, s_2, s_3, \ldots \rangle$ heißt **konvergent**, wenn die Partialsummen $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ der zugehörigen Folge $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ für $n \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert s konvergieren.
Andernfalls heißt die Reihe **divergent**.

Beispiel:

Zeige, dass die geometrische Reihe der zugehörigen Folge $\langle a_n \rangle$ (a_1,q bekannt) konvergent ist.
$a_1 = 1;\ q = \frac{1}{3}$

zu a)
Die Partialsummen $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$ können mithilfe der Summenformel für geometrische Reihen berechnet werden:

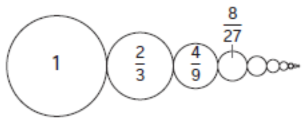
$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

weil aber nun $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ für $n \to \infty$ gegen null geht, d.h. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, gilt: $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}$

Unendliche geometrische Reihe
Wenn $-1 < q < 1$, dann ist der Grenzwert von q^n für $n \to \infty$ gleich null, d.h. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, und die geometrische Reihe konvergiert. Die Summe aller Folgenglieder der zugehörigen geometrischen Folge kann berechnet werden durch: $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 \cdot q^k = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$

Beispiel:

Gegeben sind Kreise, deren Radien eine geometrische Folge bilden (siehe Abbildung). Es werden unendlich viele Kreise aneinandergereiht. Berechne die Summe aller Kreisflächen.



Der erste Radius ist $r_1 = 1$, der zweite $r_2 = \frac{2}{3}$. Daher ist die erste Kreisfläche $A_1 = 1^2 \cdot \pi$, die zweite $A_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{4}{9} \cdot \pi$. Somit kann q bestimmt werden: $q = \frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{9}$.
Die Summe aller Kreisflächen ist daher $A = A_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 1 \cdot \pi \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = 1{,}8 \cdot \pi$

Finanzmathematik

30/360 - Deutsche (= kaufmännische) Methode
Jeder Zinsmonat umfasst 30 Tage, das Bankjahr 360 Tage.
Bei einem Kapital, das nur bis Ende Februar verzinst wird, wird der Februar kalendergenau gezählt.

Act/Act-Methode
Die Zinstage und das Jahr werden kalendergenau abgerechnet.

Kapitalertragssteuer (KESt)
In Österreich sind Erträge aus Sparguthaben und Girokonten mit 25% endbesteuert, d.h., es fallen keine weiteren Steuern mehr an. Für alle anderen Einkünfte aus Kapitalvermögen beträgt der Steuersatz 27,5 %.

Zinsen können entweder am Ende der Zinsperiode (**dekursive Verzinsung**) oder am Anfang einer Zinsperiode (**antizipative Verzinsung**) fällig sein. Im Bankwesen wird meist eine dekursive Verzinsung verwendet, daher wird dies im Folgenden vorausgesetzt.

Äquivalenzprinzip
Kapitalien dürfen nur dann verglichen, addiert oder subtrahiert werden, wenn sie auf denselben Zeitpunkt bezogen werden. Mittels des Aufzinsens oder Abzinsens wird eine Berechnung der Kapitalien zum gewünschten Zeitpunkt erreicht.

Beispiel:

Benedikt kauft ein gebrauchtes Motorrad. Es kostet 3 500€. Benedikt hat momentan das Geld nicht, aber das Angebot ist zu verlockend. Daher überzieht er sein Girokonto, d. h., er leiht Geld von der Bank, wobei die Überziehungszinsen 14,5% p. a. betragen.

- Berechne die Überziehungszinsen für diesen Geldbetrag für ein Jahr.
  K = 3 500, p = 14,5%, daher gilt: $Z = 3500 \cdot 0{,}145 = 507{,}50$ €

- Benedikt kann das Geld schon nach 5 Monaten zurückzahlen. Wie viel Zinsen muss er bezahlen?
  Die Anzahl der Tage ist t =150, daher gilt $Z = 3500 \cdot 0{,}145 \cdot \frac{150}{360}$ = 211,46 €.

Einfache Zinsen
Wenn die Verzinsungsdauer maximal ein Jahr ist, dann gilt bei kaufmännischer Verzinsung:
Für 1 Jahr: $Z = \frac{K \cdot p}{100}$ bzw. $K_1 = K \cdot q$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$
Für t Tage: $Z = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{360}$ bzw. $K_t = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}\right)$

Beispiel:

Antonia legt am 15. März 4 000€ auf ein Sparbuch, auf dem die Einlagen mit 3,25% verzinst werden. Nach 4 Monaten hebt sie das Geld wieder ab. Berechne die Zinsen, die Antonia für diesen Zeitraum erhält.

Der Zeitraum ist t =120 Tage, der reale Zinssatz für Antonia ist aber wegen der KESt nur mehr
$p = 3{,}25 \cdot 0{,}75 = 2{,}4375\ \%$
Die Zinsen sind daher: $Z = 4000 \cdot \frac{2{,}4375}{100} \cdot \frac{120}{360}$ = 32,50€.

Zinsenzinsen
Wenn die Zinsen nach jeder Zinsperiode kapitalisiert werden, d.h., die Zinsen werden dem Kapital hinzugerechnet und danach wieder verzinst, dann spricht man von **Zinseszinsen**.
Es gilt: $\mathbf{K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$, wobei n die Anzahl der Zinsperioden angibt.

Beispiel:

Max zahlt 2 000€ auf ein Sparbuch ein, das eine fünfjährige Laufzeit besitzt und fix mit 3,5% verzinst ist. Berechne den Geldbetrag, den er nach 5 Jahren ausbezahlt erhält.

Der Zinssatz ist um die KESt zu korrigieren: $p = 3{,}5 \cdot 0{,}75 = 2{,}625\%$, das Kapital K = 2 000, die Laufzeit n = 5.
Daher gilt: $K_5 = 2000 \cdot (1 + 0{,}02625)^5$

Frau Mühl möchte ihre Wohnung verkaufen, sie hat dafür zwei Angebote erhalten.
Angebot 1: 50000 € sofort, 40 000 € nach einem Jahr, 30000 € nach insgesamt vier Jahren
Angebot 2: 60000 € sofort und 60000 € nach drei Jahren
Frau Mühl kann das erhaltene Geld zu 2% p. a. anlegen. Argumentiere, warum eines der beiden Angebote für Frau Mühl besser ist, obwohl sie in beiden Fällen 120000 € erhält.

Die Geldbeträge werden zu unterschiedlichen Zeitpunkten eingezahlt, daher werden sie unterschiedlich lang verzinst. Die Angebote führen zu unterschiedlichen Barwerten bzw. Endwerten.
Für einen Vergleich muss das Äquivalenzprinzip gelten, es wird hier der Barwert gewählt.

Angebot 1: 40 000 € müssen für ein Jahr, 30 000 € für 4 Jahre abgezinst werden.
$$B_1 = 50\,000 + \frac{40\,000}{1{,}02} + \frac{30\,000}{1{,}02^2} = 116\,931{,}05€$$

Angebot 2: 60 000 € müssen für 3 Jahre abgezinst werden.
$$B_2 = 60\,000 + \frac{60\,000}{1{,}02^3} = 116\,539{,}34€$$
Der Barwert des ersten Angebots ist höher, daher sollte Frau Mühl das Angebot 1 annehmen.

Sparen
Wird kontinuierlich eine Rate R über einen Zeitraum von n Perioden eingezahlt, dann steht
- unmittelbar nach dem Ende der Einzahlung ein Kapital von $K_n = R \cdot \frac{1-q_m^n}{1-q_m} = R \cdot \frac{q_m^n - 1}{q_{m-1}}$
- nach einer weiteren Periode nach der letzten Einzahlung ein Kapital von

$$K_{n+1} = R \cdot q_m \cdot \frac{1-q_m^n}{1-q_m} = R \cdot q_m \cdot \frac{q_m^n - 1}{q_{m-1}}$$

zur Verfügung.

Äquivalenter Zinssatz
Zwei Zinssätze sind äquivalent, wenn sie denselben Endwert in den gleichen Zeiten auf denselben Barwert abzinsen und denselben Barwert in gleichen Zeiten auf denselben Endwert aufzinsen.
$1 + p = (1 + p_n)^2 = (1 + p_q)^4 = (1 + p_m)^{12}$
Das heißt, halbjährlicher, quartalsmäßiger oder monatlicher Zinssatz müssen zum gleichen Ergebnis führen.

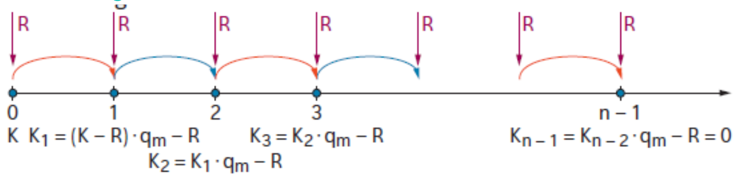
Beispiel:

Eine wohlmeinende Oma legt für ihre Enkelin Tanja (ab dem 10. Geburtstag) jedes Monat 100 € auf ein Sparbuch, das fix zu 3% verzinst ist, zuletzt an ihrem 18. Geburtstag. Über welche Summe kann Tanja an ihrem 18. Geburtstag bzw. einen Monat danach verfügen?

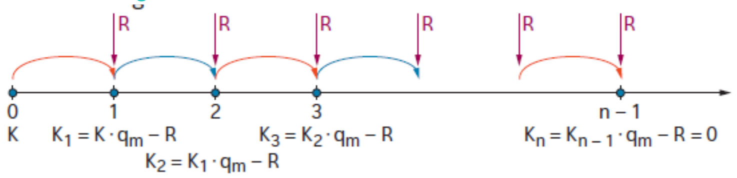
Der Jahreszinssatz ist jetzt auf einen gleichwertigen Jahreszinssatz umzurechnen.
Die Einzahlung erfolgt monatlich, daher ist der äquivalente Aufzinsungsfaktor $q_m = \sqrt[12]{1{,}0225} = 1{,}0018559$, d.h., pro Monat ist die Verzinsung 0,18559%.
Sie erhält daher entweder nach $n = 8 \cdot 12 = 96$ Perioden gleich $K_{96} = 100 \cdot \frac{1-q_m^{97}}{1-q_m} = 10\,617{,}20€$ oder einen Monat später $K_{97} = 100 \cdot q_m \cdot \frac{1-q_m^{97}}{1-q_m} = 10\,636{,}91€$

Renten
Eine Rente ist eine Folge von regelmäßigen, gleich hohen Zahlungen (Rate R), die immer in gleichen Zeitabständen erfolgt (Rentenperiode). Bei einer **vorschüssigen Rente** ist die Rate immer am Anfang einer Rentenperiode fällig, bei einer **nachschüssigen Rente** immer am Ende.
Mathematisch wird nicht zwischen Sparvorgängen und Rückzahlungen unterschieden, da es sich in beiden Fällen um eine Problemstellung aus dem Bereich der geometrischen Reihe handelt. Es gelten daher auch die analogen Formeln.

Beispiel:
Zur Erläuterung der Analogie ist der Vorgang für n Ratenzahlungen graphisch dargestellt:
vorschüssig:



nachschüssig:



Kredit
Der Zusammenhang zwischen der Kreditsumme K, der pro Periode zu zahlenden Rate R und dem für die Zahlungsperiode gültigen Zinsfaktor q_m ist gegeben durch:

$K = R \cdot \frac{1-q_m^{-n}}{q_m - 1}$ bzw. $R = K \cdot \frac{q_m - 1}{1-q_m^{-n}}$

Beispiel:

Frau Mayrhofer möchte einen Kredit über 25000 € mit einer Laufzeit von 4 Jahren aufnehmen, wobei eine monatliche Ratenzahlung erfolgen soll. Als Zinssatz sind 5,5% p.a. vereinbart.
Berechne die Höhe der monatlichen Rate.

Die für das Berechnen notwendigen Größen sind das Kapital K=25000, die Monate der Laufzeit n= $4 \cdot 12 = 48$ und der monatliche Zinsfaktor $q_m = \sqrt[12]{q} = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[12]{1{,}055} \approx 1{,}0044717$.
Frau Mayerhofer zahlt pro Monat 579,89€ an die Bank.

Leasing
Leasing ist in der Regel eine Langzeitmiete über 12 bis 60 Monate, wobei mit der Leasing-Rate einerseits die Amortisation, anderseits der Gebrauch z. B. des Autos für eine vertraglich festgelegte Anzahl Fahrkilometer finanziert wird. Als Zusatzkosten kommen separat dazu:
- sämtliche Betriebskosten
- vorgeschriebene regelmäßige Wartung
- obligatorische Vollkaskoversicherung

Man sollte beim Leasen von Autos immer beachten:
- Das Leasingobjekt gehört dem Leasinggeber und nicht dem Leasingnehmer.
- Der Leasingvertrag umfasst keine Versicherungskosten.
- Bei Autos: Maximalkilometer sind vorgeschrieben, Mehrkilometer werden verrechnet
- Enorme Kosten bei frühzeitigem Leasingende.
- Leasingkunden haben am Ende des Leasings keinen Anspruch darauf, „ihr" Auto zu kaufen.

Beispiel:

Herr Polasek möchte ein Auto kaufen, das 47 600 € kostet. Er kann den vollen Kaufpreis nicht bar zahlen, daher holt er ein Leasingangebot ein:
- Laufzeit: 36 Monate
- Anzahlung: 9 900 €
- monatliche Rate nachschüssig: 722 €
- Restwert: 19040 €

Berechne den Effektivzinssatz für dieses Angebot.

Gemäß dem Äquivalenzprinzip ist ein Vergleich nur dann möglich, wenn alle Beträge für das gleiche Datum aufgezinst oder abgezinst werden. Wir nehmen hier (willkürlich) eine Aufzinsung auf den Zeitpunkt des Restwertanfalls nach 36 Monaten an.

Wenn die monatliche Rate q_m ist, dann lautet die Gleichung:
$47\,600 \cdot q_m^{36} = 9\,900 \cdot q_m^{36} + 722 \cdot (q_m^{35} + q_m^{34} + \ldots + q_m + 1) + 19\,040$

Der mittlere Term kann als geometrische Reihe zusammengefasst werden:
$$47\,600 \cdot q_m^{36} = 9\,900 \cdot q_m^{36} + 722 \cdot \frac{1 - q_m^{36}}{1 - q_m} + 19\,040$$

Die Lösung dieser Gleichung erfolgt mittels Technologie:
x ist hier der monatliche Zinssatz, daher ist $q = 1{,}007\,02^{12} = 1{,}08757$. Somit beträgt der Effektivzinssatz etwa 8.76% p.a.

Man hätte hier auch die Gleichung durch q_m^{36} dividieren können:
$$47\,600 = 9\,900 + 722 \cdot \frac{q_m^{-36} - 1}{1 - q_m} + 19\,040 \cdot q_m^{-36}$$
In diesem Fall handelt es sich um eine Abzinsung auf den Leasingbeginn, die Lösung der Gleichung erfolgt wieder mit Technologieeinsatz und führt zum gleichen Ergebnis.