Kapitel 13: Ebenen

Parameterdarstellung einer Ebene
Eine **Ebene** e lässt sich durch Angabe eines Punktes P und zweier nicht paralleler Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit der **Parameterform** beschreiben:

$\mathbf{e: X = P + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}}$, s,t ∈ $\mathbb{R}$

Die Buchstaben s und t werden als **Parameter** bezeichnet.

Beispiel:

$e: X = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$ beschreibt eine Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ mit den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$.

Normalvektorform einer Ebene
Mithilfe der **Normalvektorform** einer **Ebene e:** $\mathbf{\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P}$, wobei X, P ∈ e, $\vec{n} \perp$ e, lässt sich die Ebene in einer **parameterfreien Darstellung e:** $\mathbf{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d}$ mit a, b, c, d ∈ $\mathbb{R}$ angeben.
Der Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor der Ebene e.
Die Berechnungen gestalten sich mit der parameterfreien Darstellung meist einfacher. Wandle daher die Parameterform der Ebene gegebenenfalls zuerst in die parameterfreie Form um.

Beispiel:

Die Ebenengleichung $e: X = \begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ in Parameterform soll in Normalvektorform angegeben werden.

Um die parameterfreie Darstellung der Ebene mithilfe der Normalvektorform $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$ zu erhalten, berechnet man zuerst das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren, um einen Normalvektor der Ebene zu erhalten:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-6\\-(-5-6)\\10-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\11\\12\end{pmatrix}$$

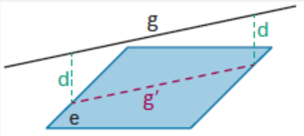
In die Normalvektorform eingesetzt ergibt:

$$\begin{pmatrix}-5\\11\\12\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\11\\12\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} = -13$$

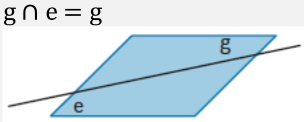
Durch Berechnung der Skalarprodukte erhält man die Ebene e in parameterfreier Form:
e: $-5x + 11y + 12z = -13$.

Lage von Geraden und Ebenen
Zwischen einer Geraden und einer Ebene gibt es im Raum drei mögliche Lagebeziehungen:

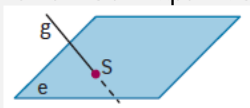
Die Gerade **g liegt parallel zur Ebene e**. Die beiden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt.
$g \cap e = \{\,\}$



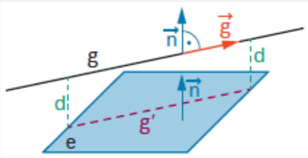
Die Gerade **g liegt in der Ebene e**. Alle Punkte der Geraden g liegen auch in der Ebene e.
$g \cap e = g$



Die Gerade **g schneidet die Ebene e** in einem Schnittpunkt S.
$g \cap e = \{S\}$



Ob es einen eindeutigen Schnittpunkt gibt, kann aufgrund der Lage des Normalvektors $\vec{n}$ der Ebene und des Richtungsvektors $\vec{g}$ der Geraden festgestellt werden. Wenn die beiden Vektoren aufeinander normal stehen, d. h. das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{g} = 0$, dann gibt es jedenfalls keinen eindeutigen Schnittpunkt.



Es muss nur mehr überprüft werden, ob ein beliebiger Punkt der Geraden in der Ebene liegt oder nicht. Falls der Punkt in der Ebene liegt, dann liegt auch dir Gerade in der Ebene. Andernfalls sind die Gerade und die Ebene echt parallel.

Beispiel:

- Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene e. Ermittle die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene e.

  $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; e: $x + y - 2 \cdot z = 3$

  Der Richtungsvektor der Geraden g ist $\vec{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, der Normalvektor der Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Das

  Skalarprodukt ergibt sich zu: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$, daher sind die Gerade g und die Ebene e parallel zueinander.

- Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene e. Ermittle den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene e.

  $g\colon X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; e: $2 \cdot x - 3 \cdot y - z = 11$

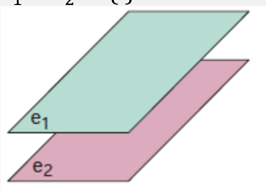
  Am einfachsten ist die Berechnung dann, wenn die Ebene in der parameterfreien Form vorliegt. Es sind dann die einzelnen Komponenten der Geraden in die Ebenengleichung einzusetzen. Auf diese Weise erhält man jenen Wert des Parameters, der den gemeinsamen Punkt festlegt.

  $$g\colon \begin{cases} x = -2 + 2 \cdot t \\ y = 1 - t \\ z = -3 + 2 \cdot t \end{cases} \rightarrow 2 \cdot (-2 + 2 \cdot t) - 3 \cdot (1 - t) - (-3 + 2 \cdot t) = 11 \rightarrow t = 3$$

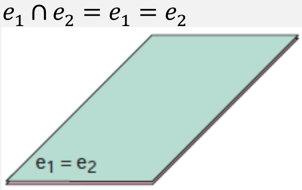
  $$\rightarrow S = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung zweier Ebenen
Zwischen zwei Ebenen gibt es im Raum drei mögliche Lagebeziehungen:

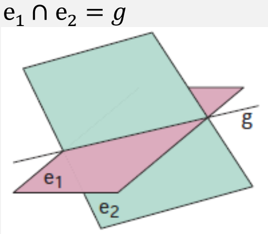
Die Ebene e_1 liegt **parallel** zur Ebene e_2.
$e_1 \cap e_2 = \{\,\}$



Die Ebene e_1 liegt in der Ebene e_2. *Die beiden Ebenen sind **ident***
$e_1 \cap e_2 = e_1 = e_2$



Die Ebene e_1 **schneidet** die Ebene e_2 in einer Schnittgeraden g.
$e_1 \cap e_2 = g$



Bei der **Untersuchung der gegenseitigen Lage** zweier Ebenen ist es hilfreich, die Ebenen in der parameterfreien Darstellung anzugeben und die Normalvektoren $\overrightarrow{n_1}$ der Ebene e_1 und $\overrightarrow{n_2}$ der Ebene e_2 miteinander zu vergleichen.

- Sind die beiden Normalvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ parallel, so muss festgestellt werden, ob die beiden Ebenen e_1 und e_2 zueinander parallel liegen oder ident sind. Dazu vergleicht man die parameterfreie Darstellung der beiden Ebenen.
  - Sind die Gleichungen kein Vielfaches voneinander, so sind die beiden Ebenen zueinander parallel.
  - Sind die Gleichungen ein Vielfaches voneinander, so spricht man von einer identischen Lagebeziehung.

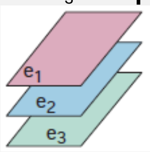
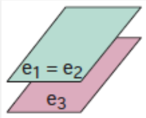
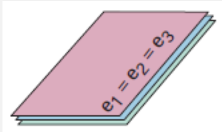
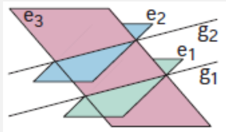
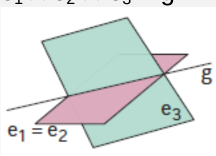
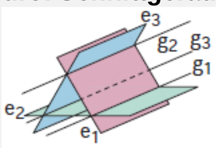
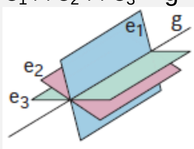
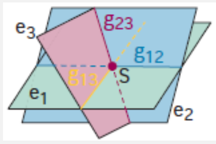
- Sind die Normalvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ nicht parallel, so schneiden die Ebenen einander in einer Gerade g, welche Schnittgerade genannt wird.

Beispiel:

- Gegeben sind die beiden Ebenen e_1 und e_2. Ermittle die Lagebeziehung zwischen den beiden Ebenen.
  $e_1\colon 8x - 6y - z = 2 \quad e_2\colon -4x + 3y + 0{,}5z = 1$
  Der Normalvektor der Ebene e_1 ist $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$, der Normalvektor der Ebene e_2 ist $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$. Die beiden Normalvektoren sind ein Vielfaches voneinander, es gilt: $\overrightarrow{n_1} = (-2) \cdot \overrightarrow{n_2}$. Die Gleichungen der Ebenen e_1 und e_2 sind jedoch kein Vielfaches voneinander, daher sind die beiden Ebenen zueinander parallel.

- Gegeben sind die zwei einander schneidenden Ebenen e_1 und e_2. Ermittle die Schnittgerade g der beiden Ebenen.
  $e_1\colon 2x - 3y + z = 1 \quad e_2\colon 2x - y + 2z = 6$
  Um die Schnittgerade g zu ermitteln, muss man jene Punkte mit den Koordinaten $(x|y|z)$ von g finden, die die beiden Ebenengleichungen $e_1\colon 2x - 3y + z = 1$ und $e_2\colon 2x - y + 2z = 6$ erfüllen. Dazu setzt man zum Beispiel z gleich t und löst das Gleichungssystem, indem man mit dem Eliminationsverfahren x und y berechnet.
  $\mathrm{I.}\ 2x - 3y + t = 1$
  $\mathrm{II.}\ 2x - y + 2t = 6 \ \Rightarrow x = 0{,}5y - t + 3$ setze x in Gleichung I ein:
  $2 \cdot (0{,}5y - t + 3) - 3y + t = 1 \Rightarrow y = 2{,}5 - 0{,}5t \ \Rightarrow x = 4{,}25 - 1{,}25t$ und $z = 0 + t$
  Somit ergibt sich für $g\colon X = \begin{pmatrix} 4{,}25 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1{,}25 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $g\colon X = \begin{pmatrix} 4{,}25 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lagebeziehung dreier Ebenen
Zwischen drei Ebenen e_1, e_2 und e_3 gibt es acht mögliche Lagebeziehungen im Raum:

1) Die Ebenen e_1, e_2 und e_3 sind **parallel**. 	2) Die Ebenen e_1 und e_2 sind **ident**, Ebene e_3 ist **parallel** zu $e_1 = e_2$ 	3) Die Ebenen e_1, e_2 und e_3 sind **ident**. 	4) Die Ebenen e_1 und e_2 sind **parallel**, Ebene e_3 ist **schneidend** zu e_1 und e_2 
5) Die Ebenen e_1 und e_2 sind **ident**, Ebene e_3 ist **schneidend** zu $e_1 = e_2$ $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = g$ 	6) Die Ebenen e_1, e_2 und e_3 sind **schneidend**. Die Lösung besteht aus **drei Schnittgeraden**. 	7) Die Ebenen e_1, e_2 und e_3 sind **schneidend**. Die Lösung besteht aus **einer Schnittgeraden**. $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = g$ 	8) Die Ebenen e_1, e_2 und e_3 sind schneidend. Die Lösung besteht aus einem Schnittpunkt. $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = S$ 

Für die Ermittlung der gegenseitigen Lage dreier Ebenen ist für die oben dargestellten **Lagebeziehungen 1 bis 5** keine Berechnung notwendig. Es reicht, wenn man die in der parameterfreien Darstellung angegebenen Ebenen bzw. die Normalvektoren miteinander vergleicht (siehe Lage zwischen zwei Ebenen). Die Berechnung der Schnittgeraden bei Lagebeziehung 4 und der Schnittgeraden bei Lagebeziehung 5 erfolgt analog zur Ermittlung der Schnittgeraden zwischen zwei Ebenen. Um zwischen den **Lagebeziehungen 6 bis 8** unterscheiden zu können, fasst man die drei in parameterfreier Darstellung angegebenen Ebenengleichungen als ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Variablen auf und löst dieses.

- **Lagebeziehung 6**: Die Lösung des Gleichungssystems führt zu einem Widerspruch.
- **Lagebeziehung 7**: Die Lösung des Gleichungssystems führt zu einer wahren Aussage.
- **Lagebeziehung 8**: Die Lösung des Gleichungssystems führt zu einer eindeutigen Lösung, nämlich zum Schnittpunkt S.

Beispiel:

Ermittle die gegenseitige Lage der Ebenen e_1, e_2 und e_3. Berechne gegebenenfalls die Schnittgerade(n) oder den Schnittpunkt der drei Ebenen.

e_1: $3x + 4y - 2z = 9$; e_2: $2x - y + 5z = 5$; e_3: $x - 2y + 3z = 0$

Der Vergleich der drei Ebenengleichungen ergibt, dass in keinem Fall eine idente oder parallele Lagebeziehung vorliegt, d. h., die drei Ebenen sind schneidend (Lage 6, 7 oder 8).
Um die gegenseitige Lage der drei Ebenen zu bestimmen, gibt man die drei Ebenengleichungen als Gleichungssystem an und löst es mithilfe der Substitutionsmethode oder der Eliminationsmethode.
$\mathrm{I}: 3x + 4y - 2z = 9$
$\mathrm{II}: 2x - y + 5z = 5$
$\mathrm{III}: x - 2y + 3z = 0$

Substitutionsmethode: Forme Gleichung III nach x um:
$\mathrm{III}: x = 2y - 3z$ und setze in I und in II ein:
in $\mathrm{I}: 3 \cdot (2y - 32) + 4y - 2z = 9$ und in $\mathrm{II}: 2 \cdot (2y - 3z) - y + 5z = 5$

Das Lösen des Gleichungssystems mit zwei Variablen ergibt $y = 2;\ 2 = 1$.
Einsetzen in III ergibt: $x = 1$.
Die drei Ebenen schneiden einander in einem Schnittpunkt S = (1 | 2 | 1) (Lage 8).

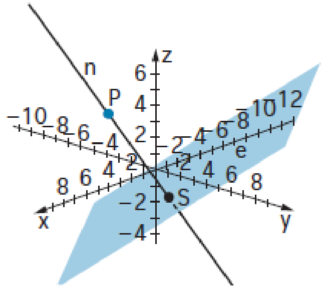
Abstand zwischen Punkt und Ebene; Punkt und Gerade; Gerade und Gerade

Der Abstand zwischen zwei algebraischen Objekten wird stets als kürzester Abstand (Normalabstand) aufgefasst.

Beispiel:

1) Gegeben sind die Ebene e und der Punkt P, welcher nicht auf der Ebene liegt. Berechne den Abstand des Punktes P zu der Ebene e.

e: 2x − 3y + 5z = −9, P = (3 |−1| 4)



Durch den Punkt P wird eine Gerade n gelegt, welche zur Ebene e normal ist. Der Normalvektor der Ebene ist dabei der Richtungsvektor der Geraden

n: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Im nächsten Schritt werden die Ebene e und die Gerade n geschnitten:

$2 \cdot (3 + 2u) - 3 \cdot (-1 - 3u) + 5 \cdot (4 + 5u) = -9 \Leftrightarrow$

$6 + 4u + 3 + 9u + 20 + 25u = -9 \Leftrightarrow 38u = -38 \Leftrightarrow u = -1.$

$$S = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = (1\,|2|\,-1)$$

Der Abstand wird zwischen dem Schnittpunkt S und dem Punkt P gemessen:

$$|\overrightarrow{PS}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right| \approx 6{,}16$$

2) Gegeben sind die Gerade g und der Punkt P, welcher nicht auf der Geraden g liegt. Berechne den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ P = (4|3|-2)$$

Das Messen des Abstands von einem Punkt zu einer Geraden funktioniert ähnlich wie das Messen des Abstands eines Punktes zu einer Ebene. Man stellt eine Gleichung der Ebene e auf, welche zur Geraden g normal ist und den Punkt P enthält. Der Richtungsvektor von g ist dabei ein Normalvektor dieser Ebene e. Eine Normalvektorform dieser Ebene lautet daher:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die parameterfreie Form der Ebene e erhalt man durch Berechnung der Skalarprodukte:

e: $x + y - z = 9$.

Der Abstand wird zwischen dem Schnittpunkt S der Geraden g und der Ebene e und dem Punkt P gemessen:

$$1 + u - 2 + u - (2 - u) = 9 \Leftrightarrow 3u = 12 \Leftrightarrow u = 4; S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (5/2/-2);$$

$$|\overrightarrow{PS}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \approx 1{,}41$$

3) Gegeben sind zwei windschiefe Geraden g: $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechne den Abstand der beiden Geraden g und h.

Für den Abstand ist die Verbindungslinie zwischen zwei Punkten, welche senkrecht zur Geraden g und gleichzeitig auch senkrecht zur Geraden h verläuft, gesucht. Daher berechnet man den Normalvektor auf die beiden Richtungsvektoren:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und stellt die Gleichung jener Ebene e auf, welche g enthält und parallel zu h

ist. Die Ebenengleichung erhält man aus $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P_g$, wobei $P_g = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ der bekannte Punkt auf g ist:

e: 2x + y − 2z = –8.

Der gesuchte Abstand ist jener zwischen der Ebene e und der zu e parallelen Geraden h. Man stellt daher eine Gerade n auf, welche durch den bekannten Punkt P_h von h verläuft und zur Ebene e normal steht:

$n: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt der Geraden n und der Ebene e wird S genannt und wird ermittelt durch: $2 \cdot (5 + 2t) + (4 + t) - 2 \cdot (2 - 2t) = -8 \quad \Rightarrow \quad t = -2$

$S = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Der Normalabstand der beiden Geraden ist dann: $\left|\overrightarrow{P_h S}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 6$