Kapitel 12: Geraden im $\mathbb{R}^3$

Geraden in Parameterform

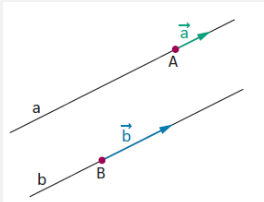
Eine Gerade g im $\mathbb{R}^2$ oder im $\mathbb{R}^3$ lässt sich durch Angabe eines Punktes P und eines Richtungsvektors $\vec{a}$ durch die **Parameterform** g: $X = P + t \cdot \vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, beschreiben.
Der Buchstabe t wird als Parameter bezeichnet.

Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der **Parameterform** darstellen, jedoch **NICHT** in der **Hauptform** oder **allgemeinen Form** bzw. **Normalvektorform**.

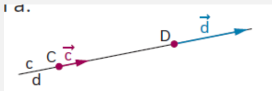
Beispiel:

g: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade durch den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lagebeziehung von Geraden im $\mathbb{R}^3$
Parallele und idente Geraden



Wie im $\mathbb{R}^2$ können Geraden im $\mathbb{R}^3$ parallel oder ident sein.
Abgebildet sind die zwei parallelen Geraden a und b. Man erkennt, dass der Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden a die gleiche Richtung besitzt wie der Richtungsvektor $\vec{b}$ der Geraden b. Der Punkt A, welcher auf der Geraden a liegt, liegt jedoch nicht auf der Geraden b bzw. umgekehrt der Punkt B der Geraden b liegt nicht auf der Geraden a.



Es gilt also: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, $k \in \mathbb{R}$ und $A \in a$, $A \notin b$ bzw. $B \notin a$, $B \in b$.
Die Abbildung zeigt die zwei identen Geraden c und d. Wie bei parallelen Geraden erkennt man, dass die Richtungsvektoren die gleiche Richtung besitzen, jedoch liegt der Punkt C der Geraden c und der Punkt D der Geraden d auf der Geraden c bzw. d. Es gilt also: $\vec{c} = k \cdot \vec{d}$, $k \in \mathbb{R}$ und $C \in c, d$ bzw. $D \in c, d$.

Beispiel:

1) Entscheide rechnerisch, ob die Gerade a) h_1: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) h_2: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$
parallel oder ident zur Geraden g: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

zu a)
Die beiden Geraden g und h besitzen Richtungsvektoren gleicher Richtung, da sie Vielfache $\left(\overrightarrow{h_1} = -1 \cdot \vec{g}\right)$ voneinander sind. Die beiden Geraden können parallel oder ident sein. Um zu entscheiden, welche der beiden möglichen Lagebeziehungen nun vorliegt, setzt man einen Punkt von h_1 in die Parameterform von g ein:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3 = -1 - u \\ 4 = -5 - 3u \\ -5 = 1 + u \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = -4 \\ u = -3 \\ u = -6 \end{Bmatrix}$$

Da der Parameter u verschiedene Werte besitzt, folgt, dass der Punkt von h_1 nicht auf g liegt ($H_1 \notin g$), daher sind g und h_1 parallel.

zu b)
Da die Richtungsvektoren von g und h_2 Vielfache $\left(\overrightarrow{h_2} = 2 \cdot \vec{g}\right)$ sind, können die beiden Geraden parallel oder ident sein. Wir kontrollieren, ob ein Punkt von h_2 auf g liegt, tut er das, so sind die beiden Geraden ident:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1 = -1 - u \\ 1 = -5 - 3u \\ -1 = 1 + u \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = -2 \\ u = -2 \\ u = -2 \end{Bmatrix}$$

Da der Parameter u verschiedene Werte besitzt, folgt, dass der Punkt von h_2 auf g liegt ($H_2 \notin g$). Die beiden Geraden g und h, sind ident.

Anmerkung: Nachdem man festgestellt hat, dass die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, kann man auch dadurch feststellen, ob h_1 bzw. h_2 parallel oder ident zu g sind, indem man den Vektor zwischen den zwei bekannten Punkten ermittelt. Wenn dieser ein Vielfaches des Richtungsvektors ist, so sind sie ident und ansonsten parallel.

- Die Geraden h_1 und g sind parallel, da $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \neq k \cdot \vec{g}, k \in \mathbb{R}$.
- Die Geraden h_2 und g sind ident, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \vec{g}$.

2.) Überprüfe, ob die Geraden a) h_1: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, und b) h_2: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ zur Geraden g: $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ schneidend oder windschief sind, und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt S.

zu a)
Um nachzuprüfen, ob h_1 und g schneidend sind, überprüft man, ob es einen gemeinsamen Punkt S gibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 2 + 3t = -2 - u \\ 1 - 2t = 3 + u \\ -3 + 2t = -1 - 3u \end{matrix} \right\}$$

Man erhält ein überbestimmtes Gleichungssystem, da es drei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten gibt. Zum Lösen kann man sich zwei der drei Gleichungen aussuchen und löst diese nach den beiden Unbekannten. Beispielsweise nehmen wir die ersten beiden Gleichungen und addieren sie:

$$\left. \begin{matrix} 2 + 3t = -2 - u \\ 1 - 2t = 3 + u \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3 + t = 1 \Rightarrow t = -2$$

Durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen erhält man: $2 + 3 \cdot (-2) = -2 - u > u = 2$. Nun prüft man anhand der nicht verwendeten Gleichung, ob die beiden Geraden schneidend oder windschief sind:
$-3 + 2 \cdot (-2) = -1 - 3 \cdot 2 \Rightarrow -7 = -7 \;\longrightarrow$ wahre Aussage.

Dadurch ist gezeigt, dass die beiden Geraden h_1 und g einander schneiden. Den Schnittpunkt S erhält man, indem man t in die Parameterform von h_1 oder u in die Parameterform von g einsetzt:
$S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ Es folgt somit: $S = (-4 \mid 5 \mid -7)$.

zu b)
Bei den Geraden h_2 und g überprüft man auch, ob es einen gemeinsamen Punkt S gibt, und löst das überbestimmte Gleichungssystem:

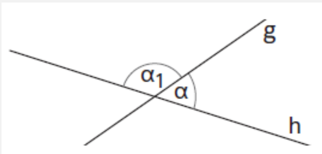
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 2 + s = -2 - u \\ 0 + 4s = 3 + u \\ 4 + 4s = -1 - 3u \end{matrix} \right\}$$

Durch Addition der ersten beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\left. \begin{matrix} 2 + s = -2 - u \\ 4s = 3 + u \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2 + 5s = 1 \Rightarrow s0 - 0{,}2$$

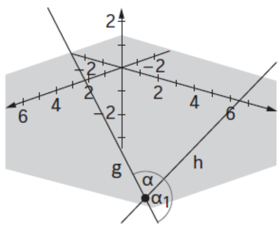
Durch Einsetzen ergibt sich: $2 - 0{,}2 = -2 - u \Rightarrow u = -3{,}8$
Nach der Überprüfung erhält man:
$4 + 4 \cdot (-0{,}2) = -1 - 3 \cdot (-3{,}8) \Rightarrow 3{,}2 = 10{,}4 \;\longrightarrow$ falsche Aussage
Die beiden Geraden h_2 und g sind windschief. Somit gibt es keinen gemeinsamen Punkt, der sowohl auf h_2 als auch auf g liegt.

Schnittwinkel zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$
Der Schnittwinkel von zwei schneidenden Geraden kann ermittelt werden. Es gibt dabei, sofern die beiden Geraden nicht normal sind, jeweils einen spitzen und einen stumpfen Schnittwinkel.



Beispiel:

Berechne den Schnittwinkel $\alpha < 90°$ der beiden schneidenden Geraden
g: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$



Den Schnittwinkel $\alpha < 90°$ erhält man mit der Formel:
$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beschreiben jeweils die Richtung der Geraden.
Es gilt daher: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 - 2 = -2$
Das Skalarprodukt im Zähler ergibt also – 2. Im Nenner werden die beiden Beträge

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ und $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ multipliziert: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 3 \cdot \sqrt{6}$.
Um den Winkel α zu bestimmen, wendet man den Arcuscosinus an: $\arccos\left(\frac{-2}{3\cdot\sqrt{6}}\right) \approx 105{,}79°$
Weil der Zähler (Skalarprodukt) negativ ist, erhält man den stumpfen Schnittwinkel α_1. Aufgrund der Bedingung in der Angabe (α < 90°), muss man den supplementären Winkel dazu ermitteln: $\alpha = 180° - 105{,}8° = 74{,}21°$.