Kapitel 10: Wahrscheinlichkeit

Laplace'sche Wahrscheinlichkeit
Im Falle eines Laplace-Experiments ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses E gegeben durch:

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\textbf{Anzahl der gewünschten Ergebnisse}}{\textbf{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Beispiel:
Die Wahrscheinlichkeit bei einem fairen sechsseitigen Würfel die Zahl sechs zu würfeln ist ein Laplace-Experiment, da die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ergebnisse gleich sind.

$\mathrm{P(6er\ würfeln)} = \frac{1}{6}$

Empirisches Gesetz der großen Zahlen
Empirisches Gesetz der großen Zahlen („theorema aureum", Jakob Bernoulli)
Ist A das Ergebnis eines Zufallsexperiments, dann stabilisieren sich bei einer hinreichend großen Anzahl n von Durchführungen dieses Experiments die relativen Häufigkeiten $h_n(A)$.

Oder: Die relative Häufigkeit ist eine gute Näherung für den Wert der Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses E: $\mathbf{P(E) \approx \lim_{n\to\infty} h_n(E)}$.

Wahrscheinlichkeit und Mengen
Elementarereignis
Ein möglicher Ausgang (mögliches Ergebnis) eines Zufallsexperiments wird als Elementarereignis bezeichnet. Schreibweise: e_1, e_2, …

Ereignisraum, Grundraum
Die Menge bestehend aus allen Elementarereignissen bezeichnet man als **Ereignisraum** Ω.

Ereignismenge E, Stichprobenraum
Die Menge aller Elementarereignisse eines Zufallsexperiments wird als Ergebnismenge oder Stichprobenraum bezeichnet. Schreibweise: $E_1 = \{e_1; e_2; \dots\}$, …
Es gilt: $E \subseteq \Omega$.

Zusammengesetztes Ereignis A
Eine Teilmenge A der Ergebnismenge heißt zusammengesetztes Ereignis. Ein Ereignis A tritt ein, wenn ein Ergebnis E beobachtet wird, das zu A gehört, d.h. $A \subset E$.

Axiome von Kolmogorov
Positivität: $0 \leq P(A) \leq 1$
Normierung: $P(E) = 1$
Additivität: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, falls $A_1 \cap A_2 = \{\ \} = \emptyset$

Ereignis A und Gegenereignis A'
$P(A') = 1 - P(A)$ bzw. $P(A) = 1 - P(A')$

Ereignisalgebra
A und B sind Ereignisse aus dem Ereignisraum Ω. Dann gilt:
a) A **und** B entspricht: $A \cap B$.
b) A **oder** B entspricht: $A \cup B$.
c) **Gegenereignis** A' entspricht: $\Omega \setminus A$
d) A **unvereinbar** mit B entspricht: $A \cap B = \{\}$.
e) A **vereinbar** mit B entspricht: $A \cap B \neq \{\}$.

Kombinatorik
Fakultät, Faktorielle
Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist definiert mit:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ $\qquad 0! = 1$

Beispiel: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Binomialkoeffizient
Der Binomialkoeffizient für natürliche Zahlen n und k mit k ≤ n ist definiert mit:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

Sprechweise: „n über k“

Beispiel:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \binom{5}{3} = 10$$

Kombinatorik

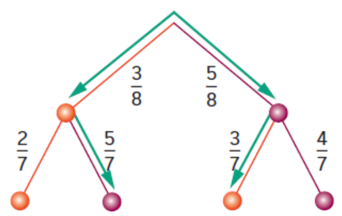
Stichprobenauswahl k aus n	**Variation mit** Beachtung der Reihenfolge	**Kombination ohne** Beachtung der Reihenfolge	
Mit Zurücklegen	$wV_k^n = n^k$	$wC_k^n = \binom{n+k-1}{k}$	**mit** Mehrfachbesetzung
Ohne Zurücklegen	$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n}{k}$	**Ohne** Mehrfachbesetzung
	Mit unterscheidbaren Kugeln	**Nicht** unterscheidbare Kugeln	**Verteilung von k Kugeln auf n Behälter**
Permutation	Alle sind unterscheidbar	Einzelne (k_1; k_2; …) sind nicht unterscheidbar.	
N Element ohne Auswahl	$Pn = n!$	$P_n^w = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots}$	

Berechnen von Wahrscheinlichkeiten mit dem Baumdiagramm
Pfadmultiplikationsregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades in einem Baum ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs dieses Pfades.
Oder: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades in einem Baum ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten an den Pfadabschnitten.

Pfadadditionsregel
Soll die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmt werden, das sich aus mehreren Ergebissen zusammensetzt, so werden die Pfadwahrscheinlichkeiten der Ergebnisse addiert.
Oder: Die Wahrscheinlichkeit verschiedener Pfade in einem Baum, die zu einem gleichwertigen Ergebnis führen, werden addiert.

Beispiel:
In einem Gefäß (wird in der Mathematik auch oft als „Urne“ bezeichnet) befinden sich insgesamt 8 Kugeln, davon sind 3 orange und 5 violett. Es wird jeweils eine Kugel gezogen, die nicht zurückgelegt wird.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln eine verschiedene Farbe haben?
Dieser Fall tritt dann ein, wenn entweder das Ereignis OV (orange-violett) oder das Ereignis VO (violett-orange) eingetreten ist.
Die beiden Pfade sind in der Abbildung gekennzeichnet. Die Wahrscheinlichkeit kann für jedes der beiden Ereignisse mittels der Pfadmultiplikationsregel berechnet werden:



$P(OV) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{15}{56}$ $\qquad$ $P(OV) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

Die beiden Pfade oder möglichen Anordnungen stellen eine Vereinigung von Ereignissen dar, daher werden die Teilwahrscheinlichkeiten addiert: $P(\{OV;\ VO\}) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

Eine Kontrollmöglichkeit, ob der Baum richtig konstruiert wurde, ist dadurch gegeben, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Verzweigungen von einem Punkt aus stets 1 ergeben muss.

Bedingte Wahrscheinlichkeit (konditionale Wahrscheinlichkeit)

Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses B unter der Bedingung, dass das Eintreten eines anderen Ereignisses A bereits bekannt ist, nennt man bedingte Wahrscheinlichkeit. Man schreibt **P(B| A)** und spricht „B wenn A" oder „B unter der Bedingung von A".

Begünstigung, Benachteiligung, Unabhängigkeit
Ein Ereignis B ist bereits eingetreten. Man betrachtet nun die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A unter dieser Voraussetzung und definiert:

B **begünstigt** A
$P(A|B) > P(A)$

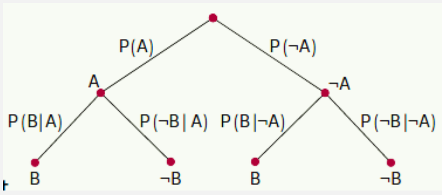
B **benachteiligt** A
$P(A|B) < P(A)$

A und B sind **voneinander unabhängig**
$P(A|B) = P(A)$ und $P(B|A) = P(B)$

Satz von Bayes
Für zwei Ereignisse A und B lässt sich die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist, durch die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist, folgendermaßen berechnen.

$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(A|B) \cdot P(A)}{P(B)}$ bzw.
$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

P(B) wir häufig als **totale Wahrscheinlichkeit** bezeichnet.



Beispiel:
Der Zugang zum Medizinstudium wird in Österreich durch einen Aufnahmetest (MedAT) reglementiert.

Erst nach dem Bestehen dieses Tests kann man mit dem Studium beginnen. Es wird eine Umfrage unter den Kandidatinnen und Kandidaten durchgeführt, die an diesem Test in Wien, Graz oder Innsbruck teilgenommen haben. Sie sind jetzt entweder zum Studium berechtigt oder auch nicht.

Zum Studium ...	Wien	Graz	Innsbruck	Summe
berechtigt	120	80	40	240
nicht berechtigt	200	100	60	360
Summe	320	180	100	600

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Student aus Wien kommt.
Es ist die Spaltensumme für Wien" und die Gesamtsumme zu betrachten: $P(Wien) = \frac{320}{600}$

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Student berechtigt ist.
Es ist die Zeilensumme für „berechtigt" und die Gesamtsumme zu betrachten:
$P(berechtigt) = \frac{240}{600}$

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Student aus Graz berechtigt ist.
Hier ist zu beachten, dass bereits eine Voraussetzung (erstes Ereignis) gegeben ist, der Student muss aus Graz sein. Dann wird nach einem zweiten Ereignis gefragt. Es sind daher die Anzahl von „Graz" und „berechtigt" und die Spaltensumme von „Graz" zu berücksichtigen: $P = \frac{80}{180}$

d) Berechne die Wahrscheinlich, dass jemand, der zum Studium berechtigt ist, aus Graz kommt.
Die Voraussetzung ist das Ereignis B = „berechtigt" und das gesuchte Ereignis ist A= „Graz". Daher gilt: $P(A|B) = P(Graz|berechtigt) = \frac{80}{240}$

Wir erkennen: Im Allgemeinen ist **P(A|B) ≠ P(B|A)**.

e) Berechne die Wahrscheinlichkeit: Jemand, der „nicht berechtigt" ist, kommt aus Innsbruck.
Es sind die Zeilensumme für „nicht berechtigt" (Ereignis) als Voraussetzung (Bedingung) und der Wert für Innsbruck (Ereignis) zu beachten, daher gilt:
$P(Innsbruck|nicht\ berechtigt) = P(A|B) = \frac{60}{360}$

f) Bestimme, ob das Ereignis B = „Innsbruck" das Ereignis A = „berechtigt" begünstigt.
Wahrscheinlichkeiten: $P(A|B) = P(berechtigt|Innsbruck) = \frac{40}{100}$, $P(A) = P(berechtigt) = \frac{240}{600}$.

Nun ist 0,4 = 0,4, daher begünstigt das Ereignis „Innsbruck" nicht das Ereignis „berechtigt".

g) Bestimme, ob das Ereignis B = „nicht berechtigt" das Ereignis A = „Wien" begünstigt.
$P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\text{Wien}|\text{nicht berechtigt}) = \frac{200}{360}$ und $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\text{Wien}) = \frac{320}{600}$
Nun ist 0,556 > 0,533. daher begünstigt das Ereignis „Wien" das Ereignis „nicht berechtigt".

Vierfeldertafel (absolute und relative Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeit)
- Jede absolute Häufigkeit in der untersten Zeile ist die Summe der absoluten Häufigkeiten darüber.
- Jede absolute Häufigkeit in der letzten Spalte ist die Summe der absoluten Häufigkeiten links davon.
- Die letzte Spalte und die letzte Zeile müssen jeweils die gleiche Gesamtsumme ergeben.
- Jede Wahrscheinlichkeit in der untersten Zeile ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten darüber.
- Jede Wahrscheinlichkeit in der letzten Spalte ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten links davon.
- Die letzte Spalte und die letzte Zeile müssen jeweils in der Summe 1 ergeben.