Kapitel 6:Änderungsmaße und weitere Aspekte einer Funktion

Absolute Änderung
Gegeben ist eine reelle Funktion f, die auf einem Intervall [a; b] definiert ist.
Die reelle Zahl **Δf = f(b) - f(a)** nennt man **absolute Änderung** von **f** in **[a; b]**.
Die **absolute Änderung** von f in [a; b) ist die Differenz der Funktionswerte f(a) und f(b).

Beispiel:
Berechne die absolute Änderung der Funktion f mit $f(x) = x-2$ im Intervall [–1; 5].
$f(5) - f(1) = (5-2) - (-1-2) = 3-(-3) = 3+3 = 6$

Relative und prozentuelle Änderung
Gegeben ist eine reelle Funktion f, die auf einem Intervall [a; b] definiert ist und f(a) ≠ 0.
Die reelle Zahl $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$ nennt man **relative Änderung** von **f** in **[a; b].**
Die reelle Zahl $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)} \cdot 100$ nennt man **prozentuelle Änderung** von **f** in **[a; b]**.
Die reelle Zahl $\frac{f(b)}{f(a)}$ nennt man **Änderungsfaktor** von **f** in **[a; b].**
Die **relative Änderung** der Funktion f im Intervall [a; b] ist das *Verhältnis* der *absoluten Änderung* f(b) - f(a) zum *Ausgangsfunktionswert* f(a).

Beispiel:
Berechne die relative und prozentuelle Änderung der Funktion f mit $f(x) = x-2$ im Intervall [–1; 5].

relative Änderung von f: $\frac{f(5)-f(-1)}{f(-1)} = \frac{6}{-3} = -2$

prozentuelle Änderung von f: $\frac{f(5)-f(-1)}{f(-1)} \cdot 100 = -200\,\%$

Mittlere Änderungsrate
Gegeben ist eine reelle Funktion f, die auf einem Intervall [a; b] definiert ist.
Die reelle Zahl $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nennt man **mittlere Änderungsrate** von **f** in **[a; b]** oder **durchschnittliche Änderungsrate** von **f** in **[a; b]** oder **Differenzenquotient** von **f** in **[a; b]**.

Die **mittlere Änderungsrate** der Funktion f im Intervall [a; b] ist das Verhältnis der absoluten Änderung f(b) - f(a) von f in diesem Intervall zur Differenz aus oberer und unterer Intervallgrenze b - a.

Beispiel:
Berechne die mittlere Änderungsrate der Funktion f mit $f(x) = 4x^2$ im Intervall [–3; 5].

Mittlere Änderungsrate von f: $\frac{f(5)-f(-3)}{5-(-3)} = \frac{4 \cdot 5^2 - 4 \cdot (-3)^2}{8} = \frac{100-36}{8} = \frac{64}{8} = 8$

Physikalischer Zusammenhang: Mittlere Änderungsrate einer Weg-Zeit-Funktion
Die mittlere Änderungsrate einer Weg-Zeit-Funktion in einem Intervall beschreibt die **durchschnittliche Geschwindigkeit** in diesem Intervall.

Beispiel:
Gegeben ist die Weg-Zeit-Funktion s mit $s(t) = 0{,}5 \cdot x^2$. [s in Meter, t in Sekunden]
Berechne die mittlere Änderung der Funktion s im Intervall [1; 4] und deute das Ergebnis im gegebenen Kontext.
$\frac{s(4)-s(1)}{4-1} = \frac{8-0{,}5}{3} = 2{,}5\ \frac{m}{s}$

Die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall [1; 4] s beträgt 2,5 $\frac{m}{s}$.

E. DORNER
westermann wien

Verkettung (Verknüpfung) von Funktionen
Für die reellen Funktionen f: $D_f \to \mathbb{R}$ und g: $D_g \to \mathbb{R}$ heißt $g \circ f$: $D_f \to \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ die **Verkettung** (Verknüpfung, Hintereinanderausführung) von g und f.
Für die Ausführung der Verkettung ist erforderlich, dass $f(D_f) \subseteq D_g$.
Außerdem ist zu beachten, dass im Allgemeinen $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.

Beispiel:
$f(x) = 2 \cdot \ln(x)$ $\quad g(x) = 2 \cdot e^x$

$f \circ g$:
$f(g(x)) = f(2 \cdot e^x) = 2 \cdot \ln(2 \cdot e^x) = 2 \cdot (\ln(2) + \ln(e^x)) = 2 \cdot (\ln(2) + x)$

$g \circ f$:
$g(f(x)) = g(2 \cdot \ln(x)) = 2 \cdot e^{2 \cdot \ln(x)} = 2 \cdot e^{\ln(x^2)} = 2x^2$

Bijektive Funktion
Eine Funktion f heißt **bijektiv**, wenn für **alle y** aus der Wertemenge W **genau ein x** aus der Definitionsmenge D mit **f(x) = y** existiert.
Umkehrfunktion f^{-1} oder f*
Wenn f: $A \to B$ ($A,B \subseteq \mathbb{R}$) eine reelle, bijektive Funktion ist, dann existiert eine **Umkehrfunktion** f^{-1}: $B \to A$.
Es gilt: $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x)) = (f \circ f^{-1})(x)$.
Funktion und Umkehrfunktion liegen *symmetrisch bezüglich der 1. Mediane*.

Beispiel:
Berechne die Umkehrfunktion zu der gegebenen Funktion f mit $f(x) = 2x - 1$. Begründe die Bijektivität von f.
$f(x) = y = 2x - 1 \;\rightarrow$ Vertauschung von x und y: $x = 2y - 1 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Funktion in mehreren Variablen
Eine Funktion f: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennt man eine **reelle Funktion in zwei Variablen**, wobei $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auch als $\mathbb{R}^2$ geschrieben werden kann.
Im Allgemeinen ist f: $D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in N^*$) eine reelle Funktion in n Variablen.

Beispiel:

- Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = 0{,}25x \cdot y^2 + 1$. Berechne den Funktionswert.
  $f(2; 4) = 0{,}25 \cdot 2 \cdot 4^2 + 1 = 9$
- Das Volumen eines Kegels ist gegeben durch $V(r;\ h) = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h$. Bestimme den Faktor k so, dass eine korrekte Aussage entsteht: $V(a \cdot r;\ b \cdot h) = k \cdot V(r;\ h)$.
  $V(2r;\ 2h) = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot \pi \cdot (2h) = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = 8 \cdot V(r; h) \;\rightarrow\; k = 8$