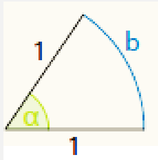
Kapitel 5: Winkelfunktionen

Bogenmaß

Das **Bogenmaß** entspricht der **Länge jenes Bogens b**, welchen der Winkel α im Einheitskreis aufspannt.
Für einen Winkel $\alpha°$ lässt sich das zugehörige **Bogenmaß** b rad mit der Formel $\mathbf{b} = \frac{\pi}{180} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ berechnen.



Beispiel:
$\alpha = 200°$ in Bogenmaß: $b = \frac{\pi}{180} \cdot 200 \approx 3{,}49 \text{ rad}$
2 rad in Gradmaß: $\alpha = 2 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 114{,}59°$

Eigenschaften der Sinusfunktion f(x) = sin(x)

Die Funktion f hat die **Definitionsmenge** $\mathbb{R}$ und die **Wertemenge** [-1; 1].

Da sich die Funktionswerte in regelmäßigen Abständen p wiederholen, bezeichnet man f als **periodische** Funktion mit der **kleinsten Periode** $p = 2\pi$: $f(x+p) = f(x) \rightarrow f(x+2\pi) = f(x)$.

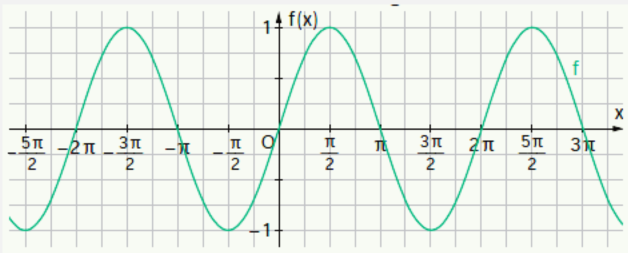
Der Graph von f ist *punktsymmetrisch zum Ursprung*, es handelt sich somit bei f um eine **ungerade** Funktion, da $f(x) = -f(-x)$.

Die Funktion f hat unendlich viele **Nullstellen**, welche sich bei den ganzzahligen Vielfachen von π befinden: $0 + k\cdot\pi = k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bei den ungeraden ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ hat f lokale **Extremstellen**: $\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Maximumstellen bei: $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und
Minimumstellen bei: $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

An jeder der unendlich vielen Maximumstellen beträgt der Funktionswert 1 und an jeder der unendlich vielen Minimumstellen beträgt der Funktionswert -1.



Monotoniebereiche von f(x) = sin(x)

Die Funktion f ist **streng monoton steigend** in $\left[-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ und **streng monton fallend** in $\left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Streckung und Stauchung entlang der y-Achse und Spiegelung

Der Faktor $a \in \mathbb{R}^*$ in der Funktionsgleichung **f(x) = a · sin(x)** bewirkt eine **Streckung** beziehungsweise **Stauchung** entlang der **y-Achse** bezüglich des Funktionsgraphen von g(x) = sin(x), ohne dabei die kleinste Periode zu verändern.

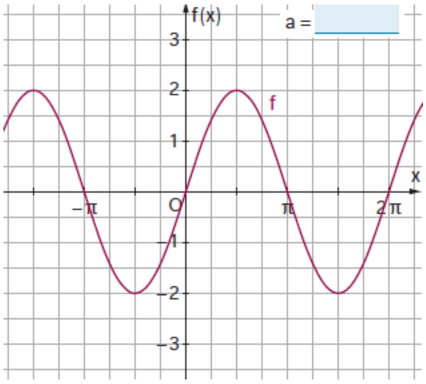
a > 1: Der Graph von g wurde um den **Faktor a** entlang der **y-Achse gestreckt**.
0 < a < 1: Der Graph von g wurde um den **Faktor a** entlang der **y-Achse gestaucht**.
a < 0: Der Graph von g wird um den **Faktor |a|** entlang der y-Achse gestreckt oder gestaucht und anschließend bezüglich der **x-Achse gespiegelt**.

Die Definitionsmengen von f und g ist $\mathbb{R}$, jedoch beeinflusst der Parameter a die Funktionswerte und somit die Wertemenge. Die Wertemenge von f ist [-|a|; |a|].

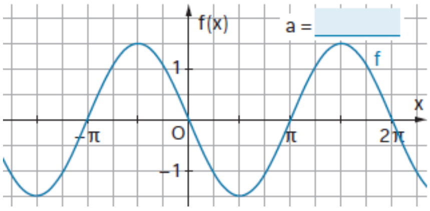
E. DORNER
westermann wien

Beispiel:
Gegeben ist die Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin(x)$. Bestimme a.

$a = 2 \;\rightarrow\; f(x) = 2 \cdot \sin(x) \rightarrow$ Streckung entlang der y-Achse



$a = -1{,}5 \;\rightarrow\; f(x) = -1{,}5 \cdot \sin(x) \rightarrow$ Streckung entlang der y-Achse und bezüglich der x-Achse gespiegelt



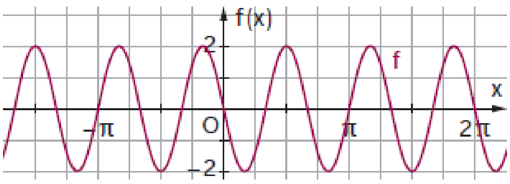
Streckung und Stauchung entlang der x-Achse und Spiegelung
Der Faktor b ∈ ℝ /{0} in der Funktionsgleichung f(x) = sin (b · x) bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung entlang der x-Achse bezüglich des Funktionsgraphen von g(x) = sin(x).
Die Funktion f schwingt von 0 bis 2π genau b-mal.

b > 1: Der Graph von g wird mit dem **Faktor** $\frac{1}{b}$ entlang der **x-Achse gestaucht**.
0 < b < 1: Der Graph von g wird mit dem **Faktor** $\frac{1}{b}$ entlang der **x-Achse gestreckt**.
b < 0: Der Graph von g wird mit dem **Faktor** $\left|\frac{1}{b}\right|$ entlang der x-Achse gestreckt oder gestaucht und anschließend bezüglich der **x-Achse gespiegelt**.

Die Funktionswerte der Maxima bzw. Minima von f und g sind gleich und somit auch die Wertebereiche, jedoch beeinflusst der Parameter b die **kleinste Periode** (p_f, bzw. p_g) und die Position der **Nullstellen** (n_f bzw. n_g) und **Extremstellen** (e_f bzw. e_g).
Es gelten die Beziehungen:
$p_f = \frac{p_g}{b}$ $\quad$ $n_f = \frac{n_g}{b}$ $\quad$ $e_f = \frac{e_g}{b}$

Beispiel:
Gegeben ist die Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$. Bestimme a und b.

$a = -2$ und $b = 3 \;\rightarrow\; f(x) = -2 \cdot \sin(3x) \rightarrow$ Streckung entlang der y-Achse und bezüglich der x-Achse gespiegelt; Stauchung entlang der x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{3}$.

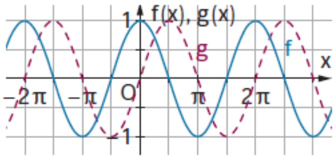


Verschiebung entlang der x-Achse
Die Konstante c ∈ ℝ* in der Funktionsgleichung f(x) = sin(x + c) bewirkt eine Verschiebung des Graphen entlang der x-Achse bezüglich des Funktionsgraphen von g(x) = sin(x).

c > 0: Der Graph von g wird um c Einheiten entlang der **x-Achse** nach **links verschoben**.
c < 0: Der Graph von g wird um c Einheiten entlang der **x-Achse** nach **rechts verschoben**.

Die **Definitionsmenge**, die **kleinste Periode** und die Funktionswerte der Maxima und Minima, also die **Wertemenge** von f und g sind gleich, jedoch beeinflusst der Parameter c die Nullstellen und Extremstellen.
Diese verschiebt c ebenso wie den Graphen entlang der x-Achse:
Besitzt g an einer Stelle n eine Nullstelle, so besitzt f eine **Nullstelle** bei $n_1 = n - c$.
Ist e eine lokale Extremstelle von g, so hat f an der Stelle $e_1 = e - c$ eine lokale **Extremstelle**.

Beispiel:
$g(x) = \sin(x)$
$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



Der Graph von g wurde um $\frac{\pi}{2}$ nach links entlang der x-Achse verschoben, um jenen von f zu erhalten.

Eigenschaften der Cosinusfunktion f(x) = cos(x)
Die Funktion f besitzt die **Definitionsmenge** $\mathbb{R}$ und **Wertemenge [-1; 1].**
Da sich die Funktionswerte in regelmäßigen Abständen p wiederholen, bezeichnet man f als **periodische Funktion** mit der **kleinsten Periode** p = 2π: f(x + p) = f(x) → f(x+ 2π) = f(x).
Der Graph von f ist **symmetrisch** zur **y-Achse**, also ist die Funkion f eine **gerade** Funktion mit f(x) = f(-x).

Die Funktion f hat unendlich viele **Nullstellen**, welche sich bei den ungeraden ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ *befinden:* $\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

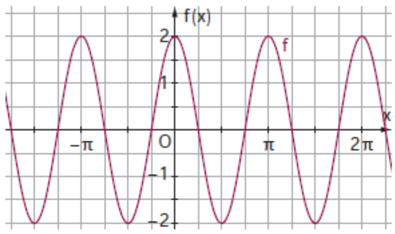
Bei den ganzzahligen Vielfachen von π hat f lokale **Extremstellen: k · π, k ∈ $\mathbb{Z}$**.
Maximumstellen bei: 0 + k · 2 π = k·2 π, k ∈ $\mathbb{Z}$ und **Minimumstellen** bei: π + k · 2 π, k ∈ $\mathbb{Z}$.
An jeder der unendlich vielen Maximumstellen beträgt der Funktionswert 1 und an jeder der unendlich vielen Minimumstellen -1.

Monotoniebereiche von f(x) = cos (x)
Die Funktion f ist streng monoton steigend in [-π + k · 2 π; k · 2 π], k ∈ $\mathbb{Z}$ und streng monoton fallend in [k · 2 π; π + k · 2 π;], k ∈ $\mathbb{Z}$.

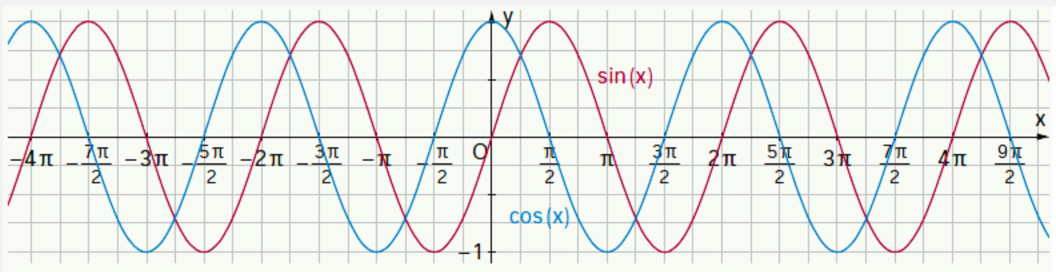
Die Parameter a, b und c der allgemeinen Sinusfunktion f(x) = a · sin (b · (x + c)), a, b, c ∈ $\mathbb{R}$ haben auf die allgemeine Cosinusfunktion g(x) = a · cos(b · (x+ c)) dieselben Auswirkungen.

Beispiel:
Gegeben ist die Cosinusfunktion $f(x) = a\cdot\cos(b\cdot x)$. Bestimme a und b.

$a = 2$ und $b = 2$ → $f(x) = 2\cdot\cos(2x)$ → Streckung entlang der y-Achse; Stauchung entlang der x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{2}$



Zusammenhang zwischen der Sinusfunktion und der Cosinusfunktion
Es gilt außerdem: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ und $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$



Beispiel:
Umrechnung von der Cosinusfunktion auf die Sinusfunktion:
$f(x) = 5\cdot\cos(3x) = 5\cdot\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 5\cdot\sin\left(3\cdot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

Eigenschaften der Tangensfunktion f(x) = tan(x)

Die Funktion f hat die **Definitionsmenge**

$\mathbb{R} \setminus \left\{\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$ und die **Wertemenge** $\mathbb{R}$.

Der Graph von f besitzt an den ungeraden ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ Polstellen: $\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

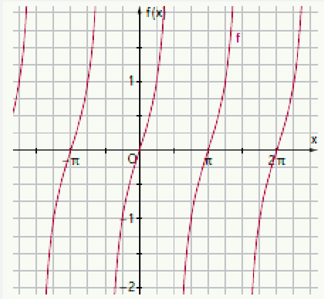
Da sich die Funktionswerte in regelmäßigen Abständen p wiederholen, bezeichnet man f als **periodische** Funktion mit der kleinsten Periode $p=\pi$:

$f(x + p) = f(x) \rightarrow f(x + \pi) = f(x)$.

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, also ist die Funktion f eine **ungerade** Funktion mit $f(x) = -f(-x)$.

Die Funktion f hat unendlich viele **Nullstellen**, welche sich bei den ganzzahligen Vielfachen von π befinden: $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Da die Funktion f im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend ist, gibt es weder lokale Maximum- noch Minimumstellen.

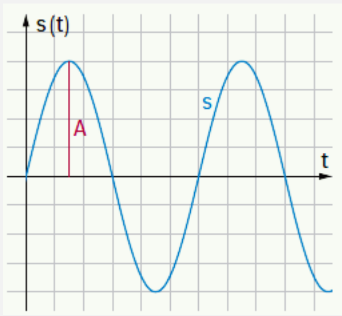


Harmonische Schwingung

Amplitude A

Beschreibt s eine harmonische Schwingung, so wird die **maximale Entfernung zur Ruhelage** eines beispielsweise schwingenden Körpers als **Amplitude A** bezeichnet. Die Amplitude wird in Meter gemessen und kommt als Faktor in der Funktionsgleichung von s vor:

$s(t) = A \cdot \sin(t)$, t in Sekunden und s (t) in Meter.



Kreisfrequenz ω, Schwingungsdauer T und Frequenz f

Beschreibt s eine harmonische Schwingung, so wird die Anzahl der Schwingungen im Intervall [0; 21] als **Kreisfrequenz ω** bezeichnet.

Die **Schwingungsdauer T** gibt die Zeitdauer in Sekunden an, in welcher beispielsweise ein Körper eine volle Schwingung erbringt.

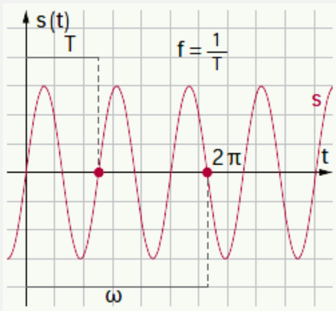
Die **Frequenz f** gibt die Anzahl an Schwingungen pro Sekunde an.

Die Einheit von f ist Hertz (s^{-1} = 1 Hz).

Zwischen der Kreisfrequenz ω, der Schwingungsdauer T und der Frequenz f gelten folgende Zusammenhänge:

1.) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ **2.)** $f = \frac{1}{T}$ **3.)** $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow \omega = 2\pi \cdot f$

Die Funktionsgleichung einer harmonischen Schwingung mit der Amplitude A und der Kreisfrequenz ω lautet: $s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$.



Beispiel:

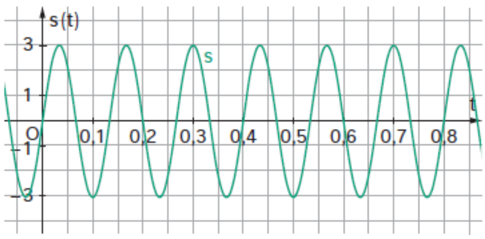
$s(t) = 4 \cdot \sin(20\pi t)$

Die Amplitude lässt sich leicht am Graphen ablesen: A = 4m.

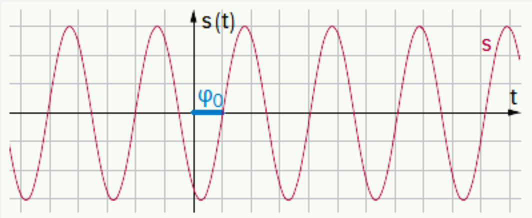
Die Funktion s führt innerhalb einer Sekunde 10 volle Schwingungen durch. Das heißt, f = 10Hz.

Für die Schwingungsdauer T gilt: $T = \frac{1}{10} = 0{,}1$ s. Man sieht auch anhand des Graphen, dass s von 0 s bis 0,1 s genau eine Schwingung durchführt.

Für die Kreisfrequenz $\omega\omega$ gilt: $\omega = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$.



Phasenverschiebung φ_0



Beschreibt s eine harmonische Schwingung, so kann es vorkommen, dass beispielsweise ein Körper zum Zeitpunkt t=0 sich nicht in der Ruhelage befindet, sondern sin $(\omega \cdot \varphi_0)$ Meter davon entfernt.
Der **Parameter φ_0** wird als **Phasenverschiebung**(szeit) bezeichnet.
In der Funktionsgleichung der harmonischen Schwingung mit der Amplitude A und der Kreisfrequenz ω tritt die Konstante φ_0 wie folgt auf:
$s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t + \varphi_0)) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \omega \cdot \varphi_0)$.

Beispiel:

$$s(t) = 2 \cdot \sin(3t - \pi) \Rightarrow s(t) = 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right) \rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}\ s$$