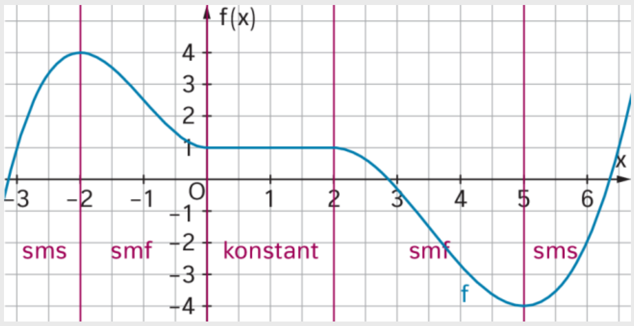
Kapitel 3: (Polynom)Funktionen

Monotonie

Sei I ein Teilintervall der Definitionsmenge D einer Funktion f, so ist f für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$

(1) monoton steigend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$.
(2) streng monoton steigend, wenn $f(x_1) < f(x_2)$.
(3) monoton fallend, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$.
(4) streng monoton fallend, wenn $f(x_1) > f(x_2)$.
(5) konstant, wenn $f(x_1) = f(x_2)$.



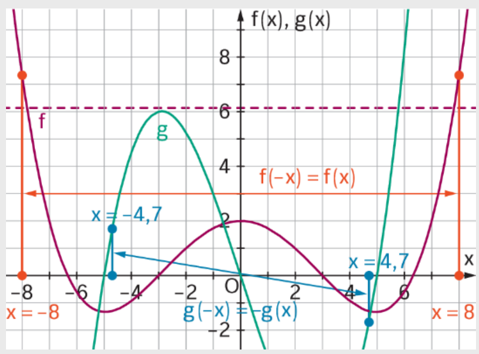
Beispiel:
Die abgebildete Funktion f ist

- streng monoton steigend in den Intervallen $(-\infty; -2]$, $[5; \infty)$.
- streng monoton fallend in den Intervallen $[-2; 0]$, $[2; 5]$.
- konstant im Intervall $[0; 2]$.
- monoton fallend in den Intervallen $[-2; 2]$, $[-2; 5]$, $[-2; 5]$,

Symmetrie

Erfüllt eine zur y-Achse symmetrische Funktion f die Bedingung $f(-x) = f(x)$, dann bezeichnet man sie als **gerade Funktion**.

Erfüllt eine zum Ursprung symmetrische Funktion g die Bedingung $g(-x) = -g(x)$, dann bezeichnet man sie als **ungerade Funktion**.



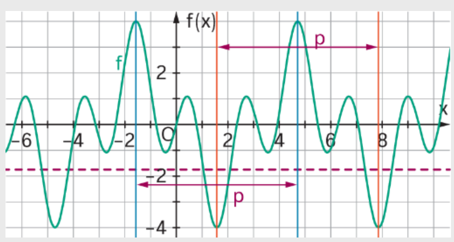
Beispiel:

- Die abgebildete Funktion **f** vierten Grades ist eine **gerade Funktion**. Der Funktionsgraph von f ist symmetrisch zur y-Achse.
- Die abgebildete Funktion **g** dritten Grades ist eine **ungerade Funktion**. Der Funktionsgraph von g ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Periodizität

Eine Funktion f ist **verschiebungssymmetrisch** oder **periodisch**, wenn es eine Zahl $p \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodass gilt: $f(x + p) = f(x)$.

Die kleinste solche Zahl p bezeichnet man (kleinste) **Periode** von f.

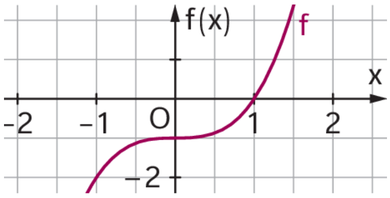


Beispiel:
Die abgebildete Funktion **f ist periodisch**, es gilt: $f(x + 6{,}28) = f(x)$. Die Periode der Funktion f beträgt p = 6,28.

Nullstellen

Als Nullstellen bezeichnet man jene Stelle x_0, in der der Graph der Funktion f die x-Achse schneidet oder berührt. Das heißt, es gilt: $f(x_0) = 0$ und $N = (x_0|0)$.

Beispiel:
Die abgebildete Funktion f besitzt an der Stelle x = 1 eine Nullstelle. Der Nullpunkt hat die Koordinaten $N = (1|0)$ und es gilt $f(1) = 0$.

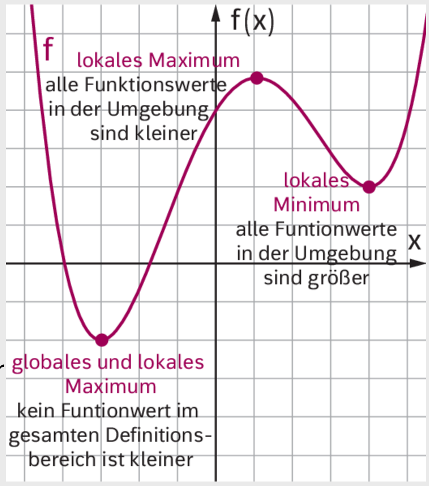


Lokale und globale Extrema

Ein **lokales Minimum** bzw. **Maximum** liegt dann vor, wenn in der Umgebung dieses Extrempunktes alle Funktionswerte größer bzw. kleiner sind.

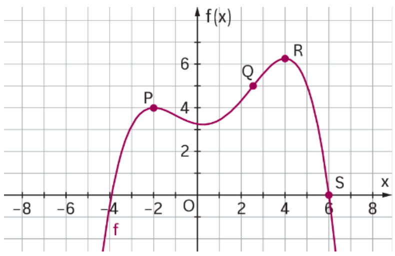
Ein **globales Minimum** bzw. **Maximum** liegt dann vor, wenn für den gesamten Definitionsbereich der Funktion kein kleinerer bzw. größerer Funktionswert vorliegt.

Als **lokale (globale) Extremstelle** bezeichnet man jene Stelle, an der der Funktionsgraph ein lokales (globales) Minimum bzw. Maximum aufweist. An einer lokalen Extremstelle findet ein Monotoniewechsel statt.

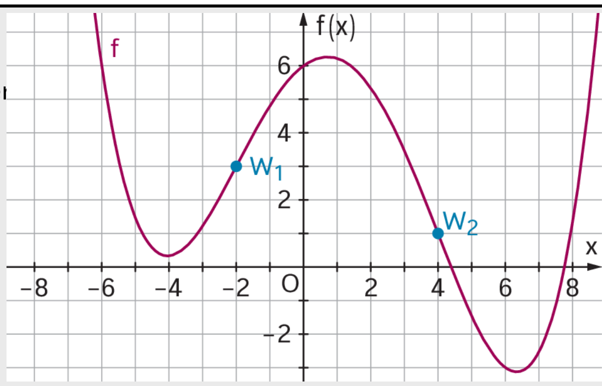


Beispiel:
Die abgebildete Funktion f vierten Grades besitzt bei

- x = –2 ein lokales Maximum (Hochpunkt)
- x = 0,3 ein lokales Minimum (Tiefpunkt)
- x = 4 ein lokales und globales Maximum (Hochpunkt)



Wendepunkte
Ein Wendepunkt W liegt genau dann vor, wenn es einen Übergang von **rechtsgekrümmt** nach **linksgekrümmt** oder umgekehrt gibt.

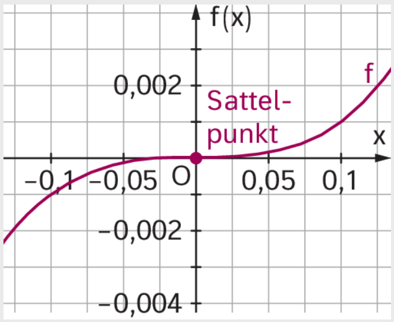


Beispiel:
Die abgebildete Funktion f besitzt an den Stellen x = –2 und x = 4 Wendestellen. Die Wendepunkte haben die Koordinaten $W_1 = (-2|3)$ und $W_2 = (4|1)$.

Sattelpunkt

An einem sogenannten **Sattelpunkt** oder **Terrassenpunkt** ändert sich die **Krümmung**, aber **nicht die Monotonie** einer Funktion.

Der Sattelpunkt liegt im Allgemeinen nicht in einem Intervall, in dem der Funktionsgraph konstant verläuft.



Beispiel:

Die abgebildete Funktion f besitzt an der Stelle x = 0 einen Sattelpunkt. Dieser Sattelpunkt ist auch zugleich ein Wendepunkt.

Polynomfunktion

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$ wird als Polynomfunktion vom Grad n (höchster vorkommender Exponent) bezeichnet.

Beispiel:

Die Funktion f mit $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 10$ ist eine Polynomfunktion fünften Grades.

Symmetrie von Polynomfunktionen

Jede Polynomfunktion ungeraden Grades, die keine Terme mit einem geraden Exponenten besitzt, ist **symmetrisch zum Ursprung**, d.h. $f(-x) = -f(x)$.

Jede Polynomfunktion geraden Grades,die keine Terme mit einem ungeraden Exponenten besitzt, ist **symmetrisch zur y-Achse**, d.h. $g(-x) = g(x)$. (Beachte: $a_0 = a_0 \cdot x^0$)

Beispiel:

- Die abgebildete Funktion **f** mit $f(x) = \frac{1}{180}x^4 - \frac{49}{180}x^2$ ist eine **gerade Funktion**. Der Funktionsgraph von f ist symmetrisch zur y-Achse.
- Die abgebildete Funktion **g** mit $g(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{25}{8}x$ ist eine **ungerade Funktion**. Der Funktionsgraph von g ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.