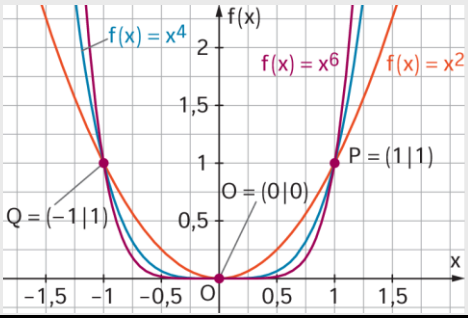
Kapitel 2: Potenzfunktion

Eine reelle Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^z$ mit $a, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nennt man **Potenzfunktion**.

Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten

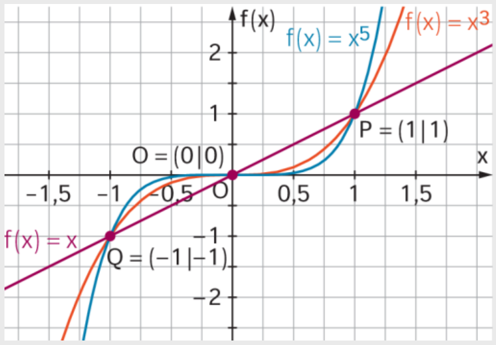
Eigenschaften von Potenzfunktionen mit einem geraden natürlichen Exponenten

(1) Die Funktionsgraphen verlaufen immer durch die Punkte (-1|1), (0|0) und (1|1).
(2) Die Funktionsgraphen sind für $x \in (-\infty; 0)$ fallend und für $x \in (0; \infty)$ steigend.
(3) Die Funktionsgraphen sind symmetrisch zur y-Achse, d.h., für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = -f(x)$.



Eigenschaften von Potenzfunktionen mit einem ungeraden natürlichen Exponenten

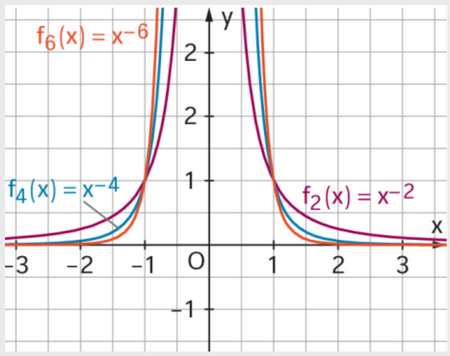
(1) Die Funktionsgraphen verlaufen immer durch die Punkte (-1|-1), (0|0) und (1|1).
(2) Die Funktionsgraphen sind für $x \in \mathbb{R}$ steigend.
(3) Die Funktionsgraphen sind symmetrisch zum Ursprung, d.h., für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.



Potenzfunktionen mit negativem ganzzahligem Exponenten

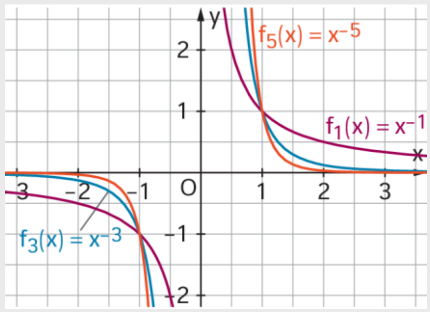
Eigenschaften von Potenzfunktionen mit einem negativen geraden Exponenten

(1) Die Funktionsgraphen verlaufen immer durch die Punkte (-1|1) und (1|1).
(2) Die Funktionsgraphen sind für $x \in (-\infty; 0)$ steigend und für $x \in (0; \infty)$ fallend.
(3) Die Funktionsgraphen sind symmetrisch zur y-Achse, d.h., für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = f(-x)$.



Eigenschaften von Potenzfunktionen mit einem negativen ungeraden Exponenten

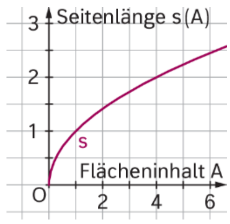
(1) Die Funktionsgraphen verlaufen immer durch die Punkte (-1|-1) und (1|1).
(2) Die Funktionsgraphen sind für alle $x \neq 0$ fallend.
(3) Die Funktionsgraphen sind symmetrisch zum Ursprung, d.h., für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.



Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

Eine Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} = x^{0,5}$ für $x \in \mathbb{R}^+$ nennt man **Quadratwurzelfunktion**.

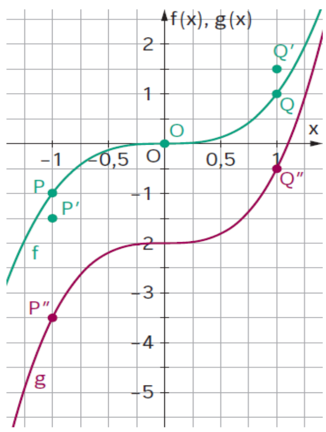
Beispiel:
Die Funktion s mit $s(A) = \sqrt{A}$ ordnet dem Flächeninhalt A eines Quadrates seine Seitenlänge s(A) zu.



Strecken und Verschieben von Potenzfunktionen

Wird der Funktionsgraph einer Funktion $f(x) = x^z$ mit $z \in \mathbb{N}^*$ um a Einheiten in Richtung der y-Achse gestreckt und um b Einheiten in Richtung der y-Achse verschoben, so erhält man den Funktionsgraphen einer Funktion g mit der Funktionsgleichung: $f(x) = a \cdot f(x) + b = a \cdot x^z + b$.

Beispiel:
Der Funktionsgraph von $f(x) = x^3$ wird zuerst um +1,5 Einheiten **in Richtung der y-Achse gestreckt**. Das bedeutet, dass die y-Koordinate aller Punkte des Funktionsgraphen von f mit dem Faktor 1,5 multipliziert werden. Aus den Punkten P, O und Q entstehen die Punkte P′, O′ und Q′ mit den Koordinaten P′ = (−1|−1,5), O′ = (0|0) und Q′ = (1|1,5).
Nun wird der Funktionsgraph von f um −2 Einheiten **in y Richtung verschoben**. Aus den Punkten P′, O′ und Q′ entstehen die Punkte P″, O″ und Q″ mit den Koordinaten P″ = (−1|−3,5), O″ = (0|−2) und Q″= (1|−0,5). Jeder Punkt des neu entstandenen Funktionsgraphen hat somit die Koordinaten $(x\,|1{,}5 \cdot x^3 + 2)$.



Für die Funktionsgleichung von g gilt: $g(x) = 1{,}5 \cdot x^3 + 2$.