Kapitel 1: Potenzen und Wurzeln

Für eine **Potenz** mit der **Basis** $a \in \mathbb{R}$ und dem **Exponenten** $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{\text{n-mal}}$ Spezialfall: $a^1 = a$

Für $a \neq 0$: $a^0 = 1 \cdot a^0 = 1$

Beispiel:
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$x^3 = x \cdot x \cdot x$
$7^0 = 1$

Potenzen dürfen nur addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie sowohl **gleiche Basen** als auch **gleiche Exponenten** besitzen. In dem Fall addiert oder subtrahiert man **koeffizientenweise**.

Beispiel:
$3a^4 + 4a^4 - 5a^3 + 8a^3 = 7a^4 + 3a^3$
$6xy^2 - 1y^2 + 10xy^2 + 5y^2 - 3x^2 = 16xy^2 + 4y^2 - 3x^2$

Rechenregeln für Potenzen mit natürlichem Exponenten

Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis

(1) Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Hochzahlen addiert:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}^*$

(2) Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Hochzahlen subtrahiert:
$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}^*$

(3) Potenzen werden potenziert, indem man die Hochzahlen multipliziert:
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}^*$

Beispiel:
$2^3 \cdot 2^4 = 2^6$
$x^5 \cdot x^6 = x^{11}$

Beispiel:
$2^7 : 2^4 = \frac{2^7}{2^4} = 2^3$
$a^9 : a^6 = \frac{a^9}{a^6} = a^3$

Beispiel:
$(2^3)^5 = 2^{15}$
$(x^2)^8 = x^{16}$

Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Hochzahl

(4) Potenzieren eines Produktes von Basen: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^*$

(5) Potenzieren eines Quotienten von Basen: $(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ für $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}^*$

Beispiel:
$(3 \cdot 2)^4 = 3^4 \cdot 2^4$
$(x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3$

Beispiel:
$(3 : 2)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4}$
$(s : r)^5 = \left(\frac{s}{r}\right)^5 = \frac{s^5}{r^5}$

Rechenregeln für Potenzen mit ganzzahligem Exponenten

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Beispiel:

$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$ $\quad x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ $\quad 4 \cdot a^{-5} = \frac{4}{a^5}$

Es gelten für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ folgende Rechenregeln:

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — *Beispiel:* $2^{-3} \cdot 2^5 = 2^2;\ x^{-3} \cdot x^6 = x^3$

(2) $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — *Beispiel:* $2^3 : 2^7 = \frac{2^3}{2^7} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4};\ x^{-2} : x^{-7} = x^5$

(3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ — *Beispiel:* $(2^{-3})^4 = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}};\quad (x^{-4})^{-5} = x^{20}$

(4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n$ — *Beispiel:* $(3 \cdot 4)^{-2} = 3^{-2} \cdot 4^{-2} = \frac{1}{3^2 \cdot 4^2};\ (x \cdot y)^{-4} = x^{-4} \cdot y^{-4} = \frac{1}{x^4 \cdot y^4}$

(5) $(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ — *Beispiel:* $(3 : 2)^{-4} = \frac{3^{-4}}{2^{-4}} = \frac{2^4}{3^4};\ (x : y)^{-2} = \frac{x^{-2}}{y^{-2}} = \frac{y^2}{x^2}$

Rechenregeln für Potenzen mit nichtganzzahligem Exponenten und Wurzeln

Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ und $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ ist die n-te Wurzel von a jene Zahl b, deren n-te Potenz gleich a ist.
Man schreibt: $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$

$\sqrt[\text{Wurzelexponent}]{\text{Radikant}} = \text{Wurzelwert}$

Beispiel:

$\sqrt[5]{1024} = 4 \iff 4^5 = 1024$

Es gelten für $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{R}_0^+$ folgende Rechenregeln für Wurzeln:

(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Beispiel:

$\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$

$\left(\sqrt[4]{x}\right)^5 = x$

(2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Beispiel:

$\left(\sqrt[4]{6}\right)^3 = \sqrt[4]{6^3}$

$\left(\sqrt[5]{x}\right)^2 = \sqrt[5]{x^2}$

(3) $x \cdot \sqrt[n]{a^m} \mp y \cdot \sqrt[n]{a^m} = (x \mp y) \cdot \sqrt[n]{a^m}$

Beispiel:

$12 \cdot \sqrt[3]{4^2} - 8 \cdot \sqrt[3]{4^2} = 4 \cdot \sqrt[3]{4^2}$

$4 \cdot \sqrt[5]{x^3} + 6 \cdot \sqrt[5]{x^3} = 10 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

Es gelten für $m, n \in \mathbb{N}^*$ und $a \in \mathbb{R}_0^+$ folgende Rechenregeln für Wurzeln:

(4) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$

Beispiel:

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^7}$

$\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[15]{x^8}$

(5) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n-m}}$

Beispiel:

$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[15]{2^2}$

$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[9]{x}} = \sqrt[27]{x^6}$

(6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Beispiel:

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{21}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{21}} = \sqrt[12]{21}$

$\sqrt[5]{\sqrt[6]{x}} = \sqrt[6]{\sqrt[5]{x}} = \sqrt[30]{x}$

Es gelten für $n \in \mathbb{N}^*$, und $a \in \mathbb{R}^+$ folgende Rechenregeln für Wurzeln:

(7) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Beispiel:

$\sqrt[4]{3 \cdot 4} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{4}$

$\sqrt[5]{x \cdot y} = \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{y}$

(8) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Beispiel:

$\sqrt[5]{\frac{6}{18}} = \frac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{18}}$

$\sqrt[9]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[9]{x}}{\sqrt[9]{y}}$

E. DORNER
westermann wien

Rechenregeln für Potenzen mit rationalem Exponenten und Wurzeln

Für alle $a \in \mathbb{R}_0^+$, $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Beispiel:
$9^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{9^4}$
$x^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{x^2}$
$y^{\frac{5}{2}} = \sqrt{y^5}$

Es gelten für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $m, n \in \mathbb{Q}$ folgende Rechenregeln:

(9) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Beispiel: $2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^2$
$x^{\frac{1}{4}} \cdot x^2 = x^{\frac{9}{4}}$

(10) $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Beispiel: $9^4 : 9^{\frac{7}{2}} = \frac{9^4}{9^{\frac{7}{2}}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
$x^2 : x^3 = \frac{x^2}{x^3} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

(11) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Beispiel: $(5^2)^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{6}{4}} = 5^{\frac{3}{2}}$
$\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^6 = y^4$

(12) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n$
Beispiel: $(5 \cdot 6)^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}$
$(r \cdot s)^{\frac{4}{5}} = r^{\frac{4}{5}} \cdot s^{\frac{4}{5}}$

(13) $(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Beispiel: $(2 : 3)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}}$
$(y : z)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{y^{\frac{2}{5}}}{z^{\frac{2}{5}}}$

Rechenregeln für Potenzen mit reellem Exponenten

Es gelten für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und für $a, b \in \mathbb{R}$ die Rechenregeln wie beim Rechnen mit Potenzen mit rationalem Exponenten.