Kapitel 12: Analytik des $\mathbb{R}^2$

Mögliche Darstellungsformen von Geraden im $\mathbb{R}^2$:

Parameterdarstellung:	*Hauptform (lineare Funktion)*	*Normalvektorform*	*allgemeine Form:*
g: $x = P + t \cdot \vec{a}$ X … jeder Punkt auf g P … bekannter Punkt auf g t … Parameter $\vec{a}$ … Richtungsvektor von g	g: $y = k \cdot x + d$ bzw. $g(x) = k \cdot x + d$ k … Steigung d … Abschnitt auf der	Für $\vec{n}$ Normalvektor des Richtungsvektors und P ein Punkt der Geraden, so gilt: g: $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$	g: $a \cdot x + b \cdot y = c$

Liegt ein **Punkt auf einer Geraden**, so erfüllt er die Geradengleichung.

Beispiel: $g: X = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, P = (3 \mid 8) \Rightarrow P \in g$, da $\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

oder g: $y = \frac{3}{2} \cdot x - 7, P = (2 \mid -4) \Rightarrow P \in g$, da $-4 = \frac{3}{2} \cdot 2 - 7$

oder g: 5x – 3y = 10, P = (5 | 5) $\Rightarrow$ P $\in$ g, da 5 · 5 – 3 · 5 = 10

Umrechnungen:

1) *von Parameterdarstellung in Hauptform* und umgekehrt:

Für den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden gilt: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}$

Beispiel: $g_1: X = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix} \rightarrow k = -\frac{3}{4}$ und somit

$g_1: y = -\frac{3}{4} \cdot x + d \Rightarrow 2 = -\frac{3}{4} \cdot 4 + d \Rightarrow d = 5$ also: $g_1: y = -\frac{3}{4} \cdot x + 5$

oder: $g_2: y = 5x - 3 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ und P = (0 | - 3) $\rightarrow g_2: X = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

2) *von Hauptform in allgemeine Form* und umgekehrt:

Es reichen einfache Umformungen:

Beispiel: $g_1: y = \frac{3}{2} \cdot x - 1 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 2y = 3x - 2 \mid -3x \Leftrightarrow g_1: -3x + 2y = -2$

oder: $g_2: 5x - 2y = -3 \mid -5x \Leftrightarrow -2y = -5x - 3 \mid :(-2) \Leftrightarrow g_2: y = \frac{5}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$

3) *von Parameterform in allgemeine Form* und umgekehrt:

Es gilt, dass ein Normalvektor der *Geraden* $\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ist:

Beispiel: $g_1: X = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ und daher $\vec{n} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ mit der Normalvektorform folgt:

$$g_1: \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow g_1: 4x + y = 14$$

oder: g_2: $5x - 3y = 9 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ und somit $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

Ein möglicher Punkt ist P = (0 | - 3) $\Rightarrow$ $g_2: X = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

Zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ können sich entweder **schneiden** oder sie sind **parallel bzw. ident** (parallele Richtungs- oder Normalvektoren bzw. gleiche Steigungen). Den möglichen Schnittpunkt erhält man durch *gegenseitiges Ein- oder Gleichsetzen* der Geradengleichungen.

Beispiel: $g_1: -x + y = 4$ und $g_2: X = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ schneiden sich, da g_2 den Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und somit einen Normalvektor $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ besitzt, welcher zum Normalvektor $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ der anderen Geraden nicht parallel ist. Durch Einsetzen von g_2 in g_1 erhält man: $-(-1 + 2t) + (0 + t) = 4 \Leftrightarrow$ $1 - t = 4 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow g_2: S = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = (-7 \mid -3)$.

Wenn sich zwei Geraden schneiden, so kann ihr **Schnittwinkel** α mithilfe von $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ ermittelt werden, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die beiden Richtungsvektoren der Geraden sind. Statt den beiden Richtungsvektoren können auch die beiden Normalvektoren verwendet werden.

Der **(Normal-)Abstand** eines Punktes A von einer Geraden g mit dem Normalvektor $\vec{n}$ und dem Punkt P kann durch $\mathbf{d}(\mathbf{P}, \mathbf{g}) = |(\mathbf{P} - \mathbf{A}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n_0}}|$ ermittelt werden.

Vier merkwürdige Punkte S, U, H, I
In einem Dreieck gibt es vier merkwürdige Punkte:

Schwerpunkt S: Schnittpunkt der Schwerlinien (Verbindung der Seitenmitte zum gegenüberliegenden Eckpunkt)

Umkreismittelpunkt U: Schnittpunkt der Streckensymmetralen (Seitenhalbierenden)

Höhenschnittpunkt H: Schnittpunkt der Höhen (Senkrechte Gerade auf eine Seite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt)

Inkreismittelpunkt I: Schnittpunkt der Winkelsymmetralen (Winkelhalbierenden)

Eulersche Gerade e: Gerade durch U, H und S