Kapitel 11: Vektoren in $\mathbb{R}^2$

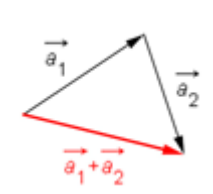
Ein **Vektor** $\vec{a}$ im $\mathbb{R}^2$ ist eine Zusammenfassung zweier reeller Zahlen entweder in einer Zeile oder in einer Spalte. Geometrisch gesehen kann jedem Punkt der Ebene genau ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^2$ und umgekehrt zugeordnet werden. Jedem zweidimensionalen Vektor entsprechen dabei auch *unendlich viele Pfeile* in der Ebene, welche alle … sind

gleich lang — *gleich gerichtet* — *parallel*

Rechenregeln für Vektoren:

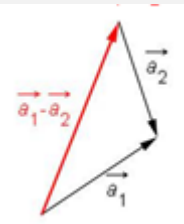
1) *Addition*: $\vec{a_1} + \vec{a_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

Summe zweier Vektoren ist wiederum ein Vektor.



2) *Subtraktion*: $\vec{a_1} - \vec{a_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$

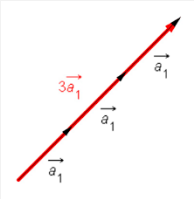
Differenz zweier Vektoren ist wiederum ein Vektor.



3) *Multiplikation*:

$k \cdot \vec{a_1} = k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a \\ k \cdot b \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor ergibt einen Vektor.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

Multiplikation zweier Vektoren ergibt eine Zahl → Skalarprodukt.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 8 = -14$

Gegeben ist der Vektor $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

Gegenvektor	Länge (Betrag)	Einheitsvektor	Normalvektor links	Normalvektor rechts
$-\vec{a_1} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$	$\lvert\vec{a_1}\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\vec{a_{1_0}} = \frac{1}{\lvert\vec{a_1}\rvert} \cdot \vec{a_1}$	$\vec{n_l} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$	$\vec{n_r} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$
Pfeil zeigt in die entgegengesetzte Richtung, behält aber die Länge.	Satz des Pythagoras	gleich gerichteter Vektor mit der Länge 1	Orthogonaler Vektor zu $\vec{a_1}$, der durch Kippen nach links entsteht	Orthogonaler Vektor zu $\vec{a_1}$, der durch Kippen nach rechts entsteht

Gegeben sind zwei Punkte A und B:

Punktberechnung
$B = A + \overrightarrow{AB}$

Vektor zwischen zwei Punkten
$\overrightarrow{AB} = B - A$

Mittelpunkt der Strecke AB
$M = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$

Parallelitätskriterium:
Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ sind zueinander parallel ($\vec{a}$ II $\vec{b}$), wenn es eine reelle Zahl v gibt, sodass gilt: $\vec{b} = v \cdot \vec{a}$. Der Vektor $\vec{b}$ ist ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$.

Orthogonalitätskriterium:
Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ stehen **normal aufeinander** ($\vec{a} \perp \vec{b}$), wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ **= 0**.

Winkel zwischen zwei Vektoren:
Der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel α kann mit $\mathbf{cos(\alpha)} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ berechnet werden.
Es gilt stets: $0° \leq \alpha \leq 180°$
Für den zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α gilt:
α ist ein **spitzer Winkel** $\Leftrightarrow$: $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
αist ein **stumpfer Winkel** $\Leftrightarrow$: $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$