Kapitel 8: Winkelfunktionen am Einheitskreis

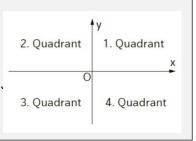
Koordinatensystem:

Das **Koordinatensystem** besteht aus 2 Geraden (Achsen), welche normal aufeinander stehen.

Die waagrechte Achse wird als **x-Achse** oder 1. Achse und die senkrechte Achse als **y-Achse** oder 2. Achse bezeichnet.

Der Schnittpunkt der beiden Achsen wird **Koordinatenursprung** genannt. Leinen positiven und einen negativen Abschnitt.

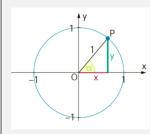
Beispiel: positive 1. Achse bzw. positive x-Achse



Einheitskreis:

Als **Einheitskreis** wird ein Kreis mit dem **Radius 1 Längeneinheit** (LE) bezeichnet. Die genaue Länge einer Einheit ist dabei nicht festgelegt. Wird der **Mittelpunkt** dieses Kreises in den **Koordinatenursprung** eines Koordinatensystems gesetzt, so liegen alle Punkte der Kreislinie entweder auf den Koordinatenachsen oder in einem der vier Quadranten. Jeder Punkt auf der Kreislinie des Einheitskreises hat zum Mittelpunkt den Abstand 1 LE.

Punkte auf dem Einheitskreis:

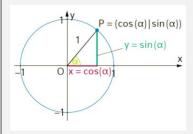


Zu jedem Punkt P = (x | y) der Kreislinie des Einheitskreises, welcher in einem der vier Quadranten liegt, lässt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge 1 LE und den Kathetenlängen x und y angeben.

Der Abstand des Punktes von der 2. Achse wird mit x und jener des Punktes von der 1. Achse mit y bezeichnet.

Die Hypotenuse OP des zugehörigen rechtwinkligen Dreiecks schließt dabei mit der positiven 1. Achse (gegen den Uhrzeigersinn gemessen) den Winkel α ein.

Sinus und Cosinus am Einheitskreis:



Die Kathete x ist $cos(\alpha)$ LE und die Kathete y ist $sin(\alpha)$ LE lang. Für einen Punkt P auf der Kreislinie des Einheitskreises gilt: $P = (cos(\alpha) \mid sin(\alpha))$.

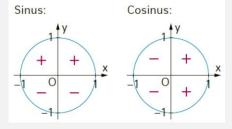
Mit sin (α) bzw. cos (α) wird der Sinus bzw. Cosinus zum Winkel α abgekürzt.

Sinus, Cosinus und später Tangens werden als **Winkelfunktionen** bezeichnet.

Vorzeichen von Sinus und Cosinus:

Die Vorzeichen des Sinus- und des Cosinuswertes eines Winkels α können je nach Lage des Punktes P im Einheitskreis von Quadrant zu Quadrant variieren, siehe Abbildungen.

Für alle Winkel $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$ gilt: -1 \leq sin $(\alpha) \leq$ 1 und -1 \leq cos $(\alpha) \leq$ 1



Beispiel: sin(133°) ~ 0,7314, also positiv, da 133° im 2. Quadrant

liegt und dort der Sinus positiv ist, der Cosinus ist hingegen dort negativ mit cos(133°) ~ -0,6820

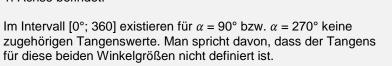
Spezielle Sinus- und Cosinuswerte:

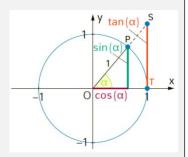
Liegt der Punkt $P = (\cos{(\alpha)} \mid \sin{(\alpha)})$ auf einer Achse, so ergeben sich für den Sinus-bzw. Cosinuswert spezielle Werte. Man kann kein zugehöriges rechtwinkliges Dreieck einzeichnen, um die Werte zu bestimmen, da eine der beiden Kathetenlängen x oder y gleich 0 ist.

Winkel α	sin (α)	cos (α)
0° bzw. 360°	0	1
90°	1	0
180°	0	-1
270°	-1	0

Tangens:

Im Punkt T = (1|0) wird eine zur 2. Achse parallele Tangente an den Einheitskreis errichtet und der Radius über die Kreislinie hinaus verlängert, sodass ein Schnittpunkt S mit der Tangente entsteht. Die Strecke ST wird als **Tangenswert eines Winkels** α bezeichnet, wobei $\tan(\alpha)$ sich stets oberhalb, unterhalb oder auf der positiven 1. Achse befindet.





Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen:

Trigonometrische Grundbeziehung

1.
$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$$
 bzw. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

2.
$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$$