Kapitel 6: Quadratische Gleichungen und Quadratische Funktionen

Quadratische Gleichungen in der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit reellen Koeffizienten, aber $a \neq 0$ können in *vier Arten* vorkommen:

$a \cdot x^2 + c = 0$
(reinquadratisch)

Beispiel:
$3x^2 - 192 = 0$
$3x^2 = 192$
$x^2 = 64$
$x_1 = 8$ und $x_2 = -8$

- **keine** reelle Lösung, wenn $-\frac{c}{a} < 0$ ist.
- **eine** reelle Lösung, wenn $c = 0$ ist.
- **zwei** reelle Lösungen, wenn $-\frac{c}{a} > 0$ ist.

$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$

Beispiel:
$x^2 + 4x = 0$
$x \cdot (x + 4) = 0$
laut *Produkt-Null-Satz*
folgt: $x_1 = 0$ und $x_2 = -4$

immer zwei reelle Lösungen
$x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

$x^2 + p \cdot x + q = 0$
(normiert)

Beispiel:
$x^2 + 6x + 5 = 0$

mit *kleiner Lösungsformel*
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
folgt: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 5}$
und daher $x_1 = -1$ und $x_2 = -5$.

Der Ausdruck unter der Wurzel wird **Diskriminante**
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ genannt.

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Beispiel:
$3x^2 + 5x - 8 = 0$

mit *großer Lösungsformel*
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$ folgt:
$x_{1,2} = \frac{-5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3}$ und
daher $x_1 = 1$ und
$x_2 = -\frac{8}{3}$.

Der Ausdruck unter der Wurzel wird **Diskriminante**
$D = b^2 - 4a \cdot c$
genannt.

- *keine* reelle Lösung, wenn $D < 0$ ist
- *eine* reelle Lösung, wenn $D = 0$ ist
- *zwei* reelle Lösungen, wenn $D > 0$ ist

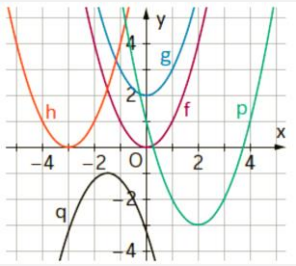
Für die normierte quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ gilt die **Satzgruppe von Vieta**:

(1) $x_1 + x_2 = -p$

(2) $x_1 \cdot x_2 = q$

(3) $\underbrace{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}_{\textit{Linearfaktoren}} = x^2 + p \cdot x + q$

Eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ heißt **quadratische Funktion**.
Den Graphen einer solchen Funktion nennt man **Parabel**.
Den tiefsten bzw. höchsten Punkt einer quadratischen Funktion nennt man **Scheitel** bzw. **Scheitelpunkt** der Parabel.



Bei **quadratischen Funktionen** mit den reellen Koeffizienten a, b und c, wobei a, b ≠0 gilt, können prinzipiell *drei Arten* unterschieden werden:

1) Quadratische Funktionen der Bauart $f(x) = a \cdot x^2$

Der Scheitelpunkt liegt im Ursprung.

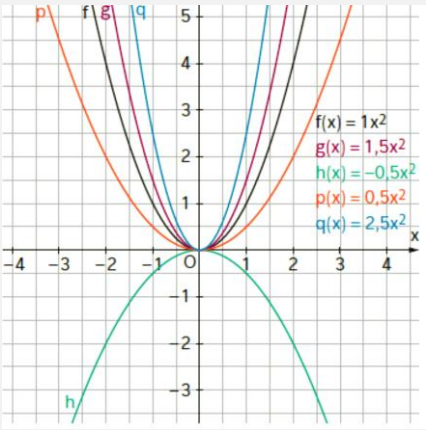
Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

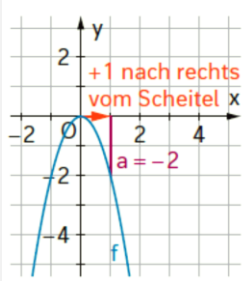
$f(x) = x^2$ nennt man *Grundparabel.*

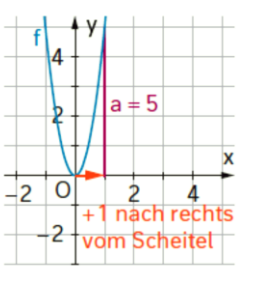
Für den Koeffizienten a gilt:

Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben offen.
Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten offen.
Für $|a| < 1$ ist die Parabel breiter als die Grundparabel.
Für $|a| > 1$ ist die Parabel schmäler als die Grundparabel.

Den Wert des Parameters a, welcher Koeffizient von x^2 einer quadratischen Funktion ist, kann man durch Ablesen aus der Parabel im Koordinatensystem bestimmen.
Gehe dabei vom Scheitel eine Einheit nach rechts und lies dann den Wert für a ab.







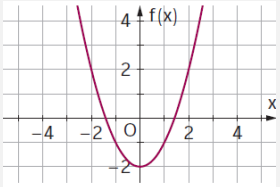
2) Quadratische Funktionen der Bauart $f(x) = a \cdot x^2 + c$

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten (0|c).

Der Graph verläuft symmetrisch zur y-Achse.

Für den Parameter c gilt:

Für $c > 0$ wird die Parabel entlang der y-Achse aus dem Koordinatenursprung um c Einheiten nach oben verschoben.
Für $c < 0$ wird die Parabel entlang der y-Achse aus dem Koordinatenursprung um |c| Einheiten nach unten verschoben.

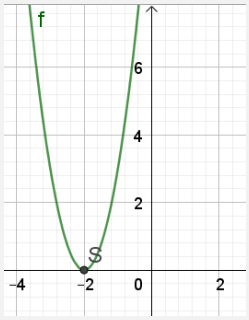


Beispiel: $f(x) = x^2 - 2$.
Der Graph von $g(x) = x^2$ wurde um 2 Einheiten nach unten verschoben

3) Quadratische Funktionen der Bauart *f(x) = a·x² + b·x* bzw. *f(x) = a·x² + b·x + c*

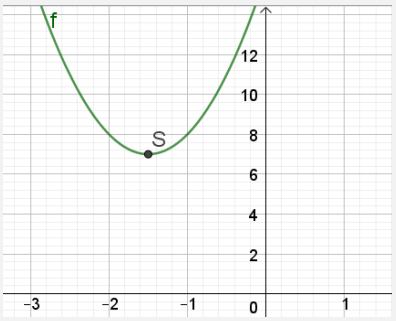
kann in die Form f(x) = a·(x – u)² gebracht werden, so liegt der Scheitelpunkt in (u|0).

Beispiel:
f(x) = 3x² + 12x + 12 = 3·(x + 2)²
Scheitelpunkt S = (-2|0)



kann in die Form f(x) = a·(x – u)² + v (Scheitelpunktform) gebracht werden, so liegt der Scheitelpunkt in (u|v).
Durch Ausmultiplizieren erhält man:
b = -2a·u und c = a·u² + v

Beispiel:
f(x) = 4x² + 12x + 16 = 4·(x + 1,5)² + 7
Scheitelpunkt S = (-1,5|7)



Der **Scheitelpunkt S** einer quadratischen Funktion der Bauart f(x) = a·x² + b·x + c hat die Koordinaten $\boldsymbol{S = \left(-\frac{b}{2a} \middle| c - \frac{b^2}{4a}\right)}$.

Eine quadratische Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit a, b, c ∈ ℝ und a ≠ 0 kann **keine** Nullstellen, **genau eine** Nullstelle oder **zwei** Nullstellen haben.
Die Anzahl der reellen Lösungen der dazugehörigen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ entsprechen der Anzahl der **Nullstellen der quadratischen Funktion**.

Besitzt eine quadratische Funktion zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2, so lässt sich die x-Koordinate x_S des Scheitelpunkts auch mit $\boldsymbol{x_S} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ermitteln.
Besitzt eine quadratische Funktion nur eine reelle Nullstelle, so ist diese die x-Koordinate des Scheitelpunktes.