Kapitel 5: Lineare Gleichungen und Lineare Funktionen

Lineare Gleichungen mit reellen Koeffizienten in …

einer Variablen
$a \cdot x + b = 0,\ a \neq 0$
besitzen genau eine reelle Lösung.

zwei Variablen
$a \cdot x + b \cdot y = c,\ a,b \neq 0$
besitzen unendlich viele Lösungen in Form von Zahlenpaaren (x|y).

Durch **Äquivalenzumformungen** erhält man Lösungen.
$3x + 9 = 0 \mid -9 \Leftrightarrow 3x = 9 \mid :3 \Leftrightarrow x = 3$ oder $5x - 2y = 3$, für $x = 3$ folgt $5 \cdot 3 - 2y = 3 \Leftrightarrow 15 - 2y = 3 \mid -15 \Leftrightarrow -2y = -12 \mid :(-2) \Leftrightarrow y = 6$, daher ist (3|6) ein mögliches Lösungspaar.

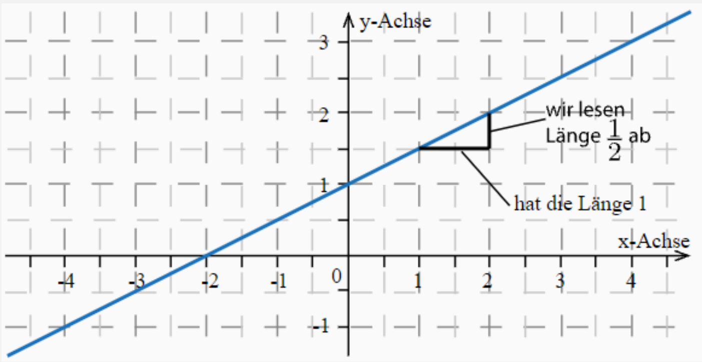
Beispiel: $3x + 9 = 0 \mid -9 \Leftrightarrow 3x = 9 \mid :3 \Leftrightarrow x = 3$ oder $5x - 2y = 3$, für $x = 3$ folgt $5 \cdot 3 - 2y = 3 \Leftrightarrow 15 - 2y = 3 \mid -15 \Leftrightarrow -2y = -12 \mid :(-2) \Leftrightarrow y = 6$, daher ist (3|6) ein mögliches Lösungspaar.

Eine Funktion der Bauart $f(x) = k \cdot x + d$ nennt man lineare Funktion.

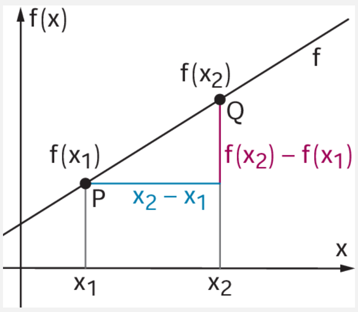
1) Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**. Geraden werden durch zumindest zwei Punkte eindeutig festgelegt.

2) Da $f(0) = d$ gilt, gibt der Koeffizient d den „Abstand" auf der y-Achse an (**y-Abschnitt**). Wenn $d = 0$ ist, so nennt man die lineare Funktion **homogen**, ansonsten ist sie inhomogen.

3) Der Koeffizient k beschreibt die Steigung, welche …
   a) die Änderung des Funktionswerts bei der Erhöhung des x-Werts um 1 beschreibt.



   b) sich aus dem Verhältnis $\mathbf{k} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (Differenzenquotient) ergibt → Steigungsdreieck



4) Der Graph einer linearen Funktion ist …

steigend, wenn $k > 0$.

fallend, wenn $k < 0$.

konstant, wenn $k = 0$.

5) Wird eine lineare Gleichung in zwei Unbekannten explizit auf y umgeformt, so kann sie als lineare Funktion interpretiert werden.
Beispiel: 3x – 2y = 10 | - 3x ⇔ -2y = -3x + 10 | : (-2) ⇔ $y = \frac{3}{2}x - 5$

6) Gilt für eine homogene lineare Funktion k ≠ 0, so liegt eine direkte Proportionalitätsfunktion f(x) = k·x vor mit den Eigenschaften:

$f(a \cdot x) = a \cdot f(x),\ a \in \mathbb{R}$

$k = \frac{f(x)}{x}, \quad \text{mit } x \neq 0$

f(x) ist **direkt proportional** zu x mit dem **Proportionalitätsfaktor k**.
Der Graph verläuft durch den Ursprung

Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Unbekannten:

a) Einsetzungsverfahren
Eine Gleichung wird nach einer der beiden Variablen umgeformt. Danach wird der erhaltene Term anstelle der Variablen in der zweiten Gleichung eingesetzt.

Werden zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen zusammengefasst, erhält man ein sogenanntes **lineares Gleichungssystem** in zwei Gleichungen und zwei Variablen:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ \text{II:}\quad & a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{aligned} \qquad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Das Zahlenpaar (x|y) heißt **Lösung des Gleichungssystems**, wenn die reellen Zahlen x und y beide Gleichungen erfüllen.

b) Gleichsetzungsverfahren
Beide Gleichungen werden so umgeformt, dass bei beiden Gleichungen auf einer Seite nur mehr die gleiche Variable steht. Anschließend setzt man die erhaltenen Terme gleich.

c) Additionsverfahren
Beide Gleichungen werden mit geeigneten Zahlen so multipliziert, dass bei anschließender Addition der beiden Gleichungen eine Variable wegfällt.

Jedes Lösungsverfahren führt auf dasselbe Ergebnis. Für jedes lineare Gleichungssystem in zwei Variablen gilt:

1. Es hat **genau eine Lösung**, wenn sich die beiden dazugehörigen Graphen der Funktionen **in einem Punkt schneiden**.
2. Es hat **keine Lösung**, wenn die beiden dazugehörigen Graphen der Funktionen parallel zueinander verlaufen, aber nicht ident sind.
3. Es hat **unendlich viele Lösungen**, wenn die beiden dazugehörigen Graphen **ident** sind (zusammenfallen).

Für ein lineares Gleichungssystem $\begin{aligned} \text{I:}\quad & a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ \text{II:}\quad & a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{aligned}$ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Das Gleichungssystem hat **unendlich viele Lösungen**, wenn die beiden Gleichungen Vielfache voneinander sind.
   Beispiel:
   $$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 2 \cdot x + 3 \cdot y = 5 \\ \text{II:}\quad & 4 \cdot x + 6 \cdot y = 10 \end{aligned}$$
2. Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**, wenn die linken Seiten der Gleichungen Vielfache voneinander sind, die rechten Seiten (Zahlen) aber nicht dasselbe Vielfache aufweisen.
   Beispiel:
   $$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 3 \cdot x + 4 \cdot y = 5 \\ \text{II:}\quad & 6 \cdot x + 8 \cdot y = 3 \end{aligned}$$
3. Das Gleichungssystem hat **genau eine Lösung**, wenn die beiden Gleichungen keine Vielfachen voneinander sind.
   Beispiel:
   $$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 2 \cdot x + 8 \cdot y = 6 \\ \text{II:}\quad & 5 \cdot x + 3 \cdot y = 10 \end{aligned}$$

Eine **lineare Kostenfunktion K(x) = k·x + d** ordnet jeder Anzahl an produzierten Einheiten x die Gesamtkosten K für die Produktion dieser x Einheiten zu.
Es gilt:

d … Fixkosten

k … Kostenzuwachs pro zusätzlich produzierter Einheit

Die **lineare Erlösfunktion E(x) = p · x** ordnet jeder verkauften Stückzahl x den dementsprechenden Erlös E zu. Der Koeffizient p beschreibt dabei den Stückpreis.

Die **lineare Gewinnfunktion G(x) = E(x) – K(x)** beschreibt für x Stück den entsprechenden Gewinn G. Jene Stelle, an welcher der Graph von G erstmals 0 ist (Wechsel von Verlust zu Gewinn) nennt man **Gewinnschwelle** oder **Break-Even-Point**.

Eine **Treppenfunktion** ist eine reelle Funktion, die nur eine bestimmte Anzahl von Funktionswerten annimmt und stückweise konstant ist.
Der Graph einer Treppenfunktion besitzt daher das Aussehen einer Stiege.

Abschnittsweise definierte Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass sich einzelne Funktionsterme immer nur auf einen bestimmten Bereich der Definitionsmenge beziehen.
Beispiel: