# Kapitel 2: Zahlen und Zahlenbereiche

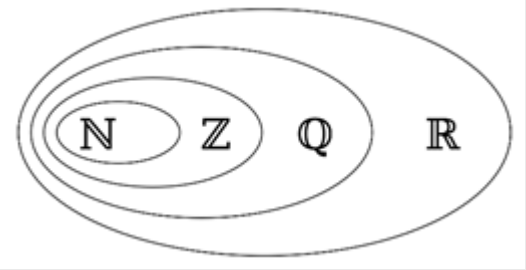
**Überblick** über die Zahlenbereiche (-mengen):

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$... natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$... ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$... rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ ... reelle Zahlen




**Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

1) Jede natürliche Zahl hat einen **Nachfolger** und bis auf die Zahl 0 einen **Vorgänger** in $\mathbb{N}$.
   *Beispiel:* 5 hat den Nachfolger 6 und 3 hat den Vorgänger 2.
2) Die unendlichen vielen natürlichen Zahlen mit der Mächtigkeit **abzählbar unendlich** sind (am Zahlenstrahl) **geordnet**.
   *Beispiel:* 4 < 7 oder 10 > 1
3) Die natürlichen Zahlen sind bezüglich der Addition und der Multiplikation **abgeschlossen**. Das bedeutet, dass die Addition von natürlichen Zahlen eine natürliche Summe und die Multiplikation von natürlichen Faktoren ein natürliches Produkt besitzen.
4) Gängige **Teilmengen**

$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$
Menge der natürlichen Zahlen ohne 0 (*positive natürliche Zahlen*)

$\mathbb{N}_g = \{0; 2; 4; 6; \dots\}$
Menge der *geraden natürlichen Zahlen*
Bauart: 2n, $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}_u = \{1; 3; 5; 7; \dots\}$
Menge der *ungeraden natürlichen Zahlen*
Bauart: 2n + 1, $n \in \mathbb{N}$

$\wp = \{2; 3; 5; 7; \dots\}$
Menge der Zahlen größer 1, welche nur die Teiler 1 und sich selbst haben (*Primzahlen*)

Jede natürliche Zahl größer 1 ist eine Primzahl oder lässt sich (eindeutig) als Produkt von Primzahlen (**Primfaktoren**) schreiben. Primzahlen treten unregelmäßig in $\mathbb{N}$ auf und es gibt sogenannte **Primzahlzwillinge** (Primzahlen, deren Differenz 2 ist).

*Beispiel:*
130 = 2 • 5 • 13 bzw. 5 und 3 sind Primzahlzwillinge, da 5 – 3 = 2

**Teilbarkeit:** a | n (die natürliche Zahl a teilt die natürliche Zahl n, wenn n = q • a gilt für ein natürliches q). Die Teiler einer natürlichen Zahl werden in der **Teilermenge** zusammengefasst.

*Beispiel:*
7 | 28, da 28 = 4 • 7 und 9 ∤ 17, da 17 kein Vielfaches von 9 ist;
Teilermenge von 12: $T_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

Um festzustellen, ob eine (große) natürliche Zahl eine Primzahl ist, kann die **Probedivision** verwendet werden.

*Beispiel:*
541 → $\sqrt{541} \sim 23$ → mögliche Teiler von 2 bis 23 probieren → kein Teiler vorhanden → Primzahl

© 2021 Verlag E. DORNER GmbH

Ausgewählte **Teilbarkeitsregeln** für natürliche Zahlen:

- durch 2 teilbar, wenn die Zahl gerade ist
- durch 4 teilbar, wenn die Hälfte der Zahl gerade ist.
- durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn die Ziffernsumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist.
- durch 5 teilbar, wenn die Zahl auf 0 oder 5 endet.

**Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

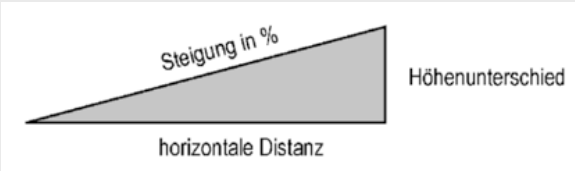
1) Jede ganze Zahl hat einen **Nachfolger** und einen **Vorgänger** in $\mathbb{Z}$.
   *Beispiel:* -3 hat den Nachfolger -2 und 0 hat den Vorgänger -1
2) Die ganzen Zahlen sind (auf der Zahlengerade) **geordnet**.
   *Beispiel:* -9 < -8 bzw. 0 < 7
3) Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl, aber nicht umgekehrt.
   *Beispiel:* $5 \in \mathbb{N}$ und $5 \in \mathbb{Z}$, aber $-5 \notin \mathbb{N}$, jedoch $-5 \in \mathbb{Z}$
4) Die ganzen Zahlen sind zusätzlich zur Addition und Multiplikation auch zur Subtraktion **abgeschlossen**.
5) Gängige **Teilmengen**:
   - $\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$ Menge der positiven ganzen Zahlen
   - $\mathbb{Z}^- = \{\ldots; -3; -2; -1\}$ Menge der negativen ganzen Zahlen
   - $\mathbb{Z}_0^+ = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ Menger der positiven ganzen Zahlen mit 0
   - $\mathbb{Z}_0^- = \{\ldots; -3; -2; -1; 0\}$ Menge der negativen ganzen Zahlen mit 0

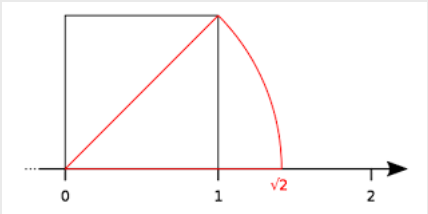
Der **Betrag** gibt den Abstand auf der Zahlengerade zu 0 an.

*Beispiel:*
| -7| = 7 oder | +5| = 5

**Rationale Zahlen** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$

1) Jede rationale Zahl lässt sich als **Bruch** schreiben. Brüche wiederum können dabei auf **endliche** (wenn die Primfaktoren des Nenners nur 2 und/oder 5 enthalten) oder **periodische Dezimalzahlen** führen.
   *Beispiel:* $\frac{8}{50} = 0{,}16$ (endliche Dezimalzahl, da $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$) oder $\frac{2}{9} = 0{,}\dot{2}$
2) Jede rationale Zahl lässt sich auf der Zahlengerade markieren, aber nicht jede Zahl auf der Zahlengerade ist rational. Zahlen, die nicht rational sind, sind beispielsweise Dezimalzahlen mit unendlichen vielen Nachkommastellen, welche jedoch nicht periodisch sind (**irrationale Zahlen**).
   *Beispiel:* $\sqrt{2}$ liefert eine nicht periodische Dezimalzahl mit unendlich vielen Nachkommastellen und kann auf der Zahlengerade dargestellt werden.




3) Die rationalen Zahlen sind **geordnet** und **dicht**, da zwischen zwei rationalen Zahlen stets eine weitere rationale Zahl gefunden werden kann.
   *Beispiel:* liegt zwischen 7 und 7,5 sicherlich $\frac{7+7{,}5}{2} = 7{,}25$

© 2021 Verlag E. DORNER GmbH

**4)** Jede *ganze und somit jede natürliche Zahl ist auch eine rationale Zahl, aber nicht umgekehrt*, da sich ganzzahlige Zahlen als Brüche schreiben lassen.
*Beispiel:* $5 = \frac{10}{2}$ oder $-3 = -\frac{9}{3}$

**Reelle Zahlen $\mathbb{R}$**

**1)** Die reellen Zahlen bestehen aus den rationalen und den irrationalen Zahlen. Somit ist auch jede rationale Zahl eine reelle Zahl.
*Beispiel:* π als irrationale Zahl ist reell, aber nicht rational.
Die Zahl 3,7 hingegen ist rational und somit auch reell.

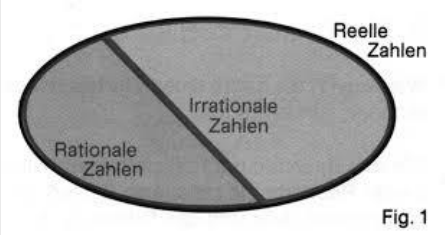


Fig. 1

**2)** (Reelle) **Intervalle** sind Teilmengen von $\mathbb{R}$, die einen zusammenhängenden Bereich auf der Zahlengerade beschreiben.
*Beispiel:* (-3; 8] für alle reelle Zahlen größer als -3 bis inklusive 8

**Prozent, Promille, ppm, ppb**

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ $\quad 1\%o = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ $\quad 1\text{ppm} = \frac{1}{1000000} = 0{,}000001$ (*parts per million*) $\quad 1\text{ ppb} = \frac{1}{1000000000} = 0{,}000000001$ (*parts per billion*)

**1)** Mit der Formel **A = G • p** erhält man den jeweiligen Anteil A des Grundwerts G, wenn p die Prozent, Promille, ppm oder ppb als Bruch bzw. Dezimalzahl beschreibt.
*Beispiel:* G = 50, p = 30% = 0,3 → $A = 50 \cdot 0{,}3 = 15$

**2)** Mit dem Faktor 1 + p bzw. 1 – p erhält man mithilfe der Formel A = G • (1 + p) bzw. A = G • (1 – p) eine **Vermehrung** bzw. **Verminderung** des Grundwerts G um die jeweiligen Prozent, Promille, ppm oder ppb, wenn p in Bruch- oder Dezimalschreibweise vorliegt.
*Beispiel:* G = 50, Vermehrung um 10% → 1,1 → A = 50 • 1,1 = 55

**3)** **Steigung:**
horizontale Distanz: Δx — *Beispiel:* Δx = 100 m
Höhenunterschied: Δh — *Beispiel::* Δh = 12 m
Steigung in % = $\frac{\Delta h}{\Delta x} \cdot 100$ — Beispiel: $\frac{12}{100} \cdot 100 = 12\ \%$

**4)** **Prozentpunkte** beschreiben den (absoluten) Unterschied zwischen zwei Prozentangaben.
*Beispiel:* zwischen 15% und 20% liegen 5 Prozentpunkte

Ist eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ in **Gleitkommadarstellung** gegeben, so besitzt sie die Form $z = a \cdot 10^b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $1 \leq a < 10$.

*Beispiel:*
3 500 000 = 3,5 • $10^6$ oder 0,0000345 = 3,45 • $10^{-5}$

**Binärsystem (Dualsystem) und Hexadezimalsystem**

besitzt die *Basis 2* und verwendet nur die Ziffern 0 und 1
*Beispiel:* $[100011]_2 = 35$

besitzt die *Basis 16* und verwendet nur die Ziffern 0 und 9, sowie die Buchstaben A und F.
*Beispiel:* $[1F4]_{16} = 500$

© 2021 Verlag E. DORNER GmbH

**Ganzzahlarithmetik**

1) **Modulo** berechnet den Rest bei der Division einer ganzen durch eine natürliche Zahl (außer 0).
   *Beispiel:* 5 mod 3 = 2, da 5 : 3 = 1 mit Rest 2
2) Durch die **ganzzahlige Division** einer ganzen Zahl a durch eine natürliche Zahl b (außer 0) wird der Quotient ohne Nachkommastellen ermittelt.
   *Beispiel:* 15 div 2 = 7, da 15 : 2 = 7 mit Rest 1

© 2021 Verlag E. DORNER GmbH