Kapitel 1: Mengen und Aussagen

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten unterscheidbaren *Objekten (Elemente)* unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

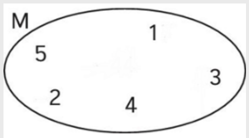
Beispiel:
Für die Menge M = {0; 2; 4; 6; 8} gilt:
$0 \in M$, d. h.: 0 ist ein Element von M
$5 \notin M$, d. h.: 5 ist kein Element von M

Mengen können beispielsweise in einem **aufzählenden** oder **beschreibenden** Verfahren beschrieben beziehungsweise **graphisch** in einem Diagramm dargestellt werden.

Aufzählendes Verfahren:
Beispiel:
N = {1; 3; 4; 5; 10; 19}
P = {0; 2; 10; 15; ...}
B = {Kurt; Maja; Neira; Konrad}

Beschreibendes Verfahren:
Beispiel:
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 7\}$, d. h.: alle natürlichen Zahlen, welche größer oder gleich 7 sind
D = {y | y ist ein österreichisches Bundesland}

Diagramm:
Beispiel:
M = {1; 2; 3; 4; 5}



Bei endlichen Mengen beschreibt die **Mächtigkeit** einer Menge die Anzahl an Elementen in dieser Menge.

Beispiel:
Die Menge E = {1; 2; 3; 4} hat die Mächtigkeit |E| = 4, da die Menge E vier Elemente enthält.

Die **leere Menge** ({ } oder ∅) ist eine Menge ohne Elemente.

In der **Durchschnittsmenge** von beispielsweise zwei Mengen befinden sich jene Elemente, welche in beiden enthalten sind.

Beispiel:
F = {-5; -4; -3; -2; -1} und G = {-2; -1; 0; 1; 2}
Durchschnittsmenge $F \cap G = \{-2; -1\}$

In der **Vereinigungsmenge** von beispielsweise zwei Mengen befinden sich jene Elemente, welche in der einen oder anderen beziehungsweise eben auch in beiden Mengen enthalten sind.

Beispiel:
H = {-4; -3; -2; -1} und I = {-2; -1; 0; 1}
Vereinigungsmenge $H \cup I = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$

In der **Differenzmenge** J \ K beispielsweise liegen nur jene Elemente von J, welche nicht auch in K enthalten sind.

Beispiel:
J = {4; 5; 6; 7; 8; 9} und K = {7; 8; 9; 10; 11}
Differenzmenge J \ K = {4; 5; 6}

Ist eine Menge S **Teilmenge** einer Menge T, so ist jedes Element von S auch in T enthalten.

Beispiel:
S = {2; 3; 4} und T = {1; 2; 3; 4; 5; 6}
Es gilt: $S \subseteq T$ (S ist eine Teilmenge von T, genauer gesagt gilt hier sogar $S \subset T$ (*echte Teilmenge*), da die beiden Mengen nicht gleich sind)

Wie viele mögliche Teilmengen (**Anzahl der Teilmengen**) aus einer vorgegebenen Menge erzeugt werden können, ergibt sich durch 2^n, wobei *n die Mächtigkeit der gegebenen Menge* beschreibt.

Beispiel:
Q = {p; q; r} und |Q| = 3
2^3 = 8 mögliche Teilmengen: { }; {p}; {q}; {r}; {p; q}; {p; r}; {r; q}; {p; q; r}

Ist eine Menge U in einer Menge V enthalten (Teilmenge), so nennt man jene Menge an Elementen, welche in V, aber nicht in U enthalten sind, **Komplementärmenge** von U.

Beispiel:
U = {2; 3; 4}und V = {1; 2; 3; 4; 5; 6}
Komplementärmenge von U: $\overline{U}$ = V \ U = {1; 5; 6}

Rechengesetze für Mengen
Für die Mengen A, B und C gilt:
1) $A \cap B = B \cap A$ bzw. $A \cup B = B \cup A$ (*kommutativ*)
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ bzw. $A \cup B = B \cup A$ (*kommutativ*)
3) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ bzw. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (*distributiv*)
4) $A \cap (A \cup B) = A$ bzw. $A \cup (A \cap B) = A$ (*asorptiv*)

Eine **Aussage** a ist ein Satz (Formulierung), der wahr (w) oder falsch (f) ist.

Die **Negation** $\neg a$ beschreibt das Gegenteil der Aussage a.
Beispiel:
a: Alle Lehrenden einer Schule unterrichten Mathematik.
$\neg a$: Es gibt mindestens eine(n) Lehrenden, der nicht Mathematik unterrichtet.

Allaussage ∀x ∈ W: a(x)
Beispiel:. $\forall x \in \mathbb{N}: x \geq 0$
bedeutet, dass alle Elemente aus den natürlichen Zahlen größer oder gleich 0 sind.

Existenzaussage $\exists x \in Z: a(x)$
Beispiel: $\exists x \in \mathbb{N}: x < 7$
bedeutet, dass es mindestens ein Element der natürlichen Zahlen gibt, welches kleiner als 7 ist.

Aussagenlogik:
Für die Aussage a und b gilt: (∧ … und, ∨ … oder)

a	$\neg a$
w	f
f	w

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f