Kapitel 9: Wahrscheinlichkeit

Diskrete Zufallsvariable
Eine Funktion X: $\Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ausgang ω_i eines Zufallsexperiments genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt reelle **Zufallsvariable** oder Zufallsgröße:

X: $\Omega \to \mathbb{R}$
$\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$

Wenn X nur die definierten Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ annehmen kann, dann spricht man von einer **diskreten Zufallsvariablen.**

Nimmt eine Zufallsvariable X die Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i) = p_i$ an, so heißt die Gesamtheit aller Paare (x_i, p_i) mit $p_i = P(X = x_i),\ i = 1, 2, \dots n$ die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der diskreten Zufallsvariablen X.

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion f** einer **diskreten Zufallsvariablen X** ist definiert durch $f(x_i) = P(X = x_i)$ mit i ∈ {1, ..., n} und sie ordnet der Zufallsvariablen X für alle Realisierungen x_i die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu.

Eine Funktion F heißt **Verteilungsfunktion** der diskreten Zufallsvariablen X, wenn für jedes a ∈ $\mathbb{R}$ gilt: $\boldsymbol{F(a) = P(X \leq a)}$.

Im Falle von diskreten Zufallsvariablen lässt sich F folgendermaßen berechnen:
$$F(a) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = a) = \sum_{x_i} P(X = x_i)$$

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable X, die die Werte x_i (i=1, ..., n) annimmt:
$$E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz einer diskreten Zufallsvariablen X, die die Werte x_i (i = 1, ..., n) annimmt:
$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen X:
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}$$

Für den Erwartungswert und die Varianz von diskreten Zufallsvariablen X und Y gelten folgende **Rechenregeln** (a,b ∈ $\mathbb{R}$):
(1) $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$
(2) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
(3) $V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$
(4) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$ **Verschiebungssatz**
(5) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Binomialverteilung
Man spricht dann von einer Binomialverteilung, wenn es ein Ereignis E gibt, für das nur zwei Ergebnisse möglich sind. Jedes Ergebnis ist unabhängig vom Ergebnis eines vorangegangenen Zufallsversuches. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind P(E) = p und P(¬ E) = 1 - p = q und bleiben für alle diese Zufallsversuche gleich groß.

Eine Zufallsvariable X folgt einer **Binomialverteilung** mit den Parametern p und n, wenn die Wahrscheinlichkeitfunktion von X durch
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$
gegeben ist.

Man schreibt oft auch kurz: **B (n; p; k)** oder **Bin (n; p; k)**.

Die (kumulative) **Verteilungsfunktion F(k) der Binominalverteilung** mit den Parametern p und n ist dann gegeben durch:

$$F(k) = P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

Erwartungswert, Varianz und **Standardabweichung** der Binomialverteilung:

$E(X) = \mu = v \cdot p$ $V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Hypergeometrische Verteilung

Eine Zufallsvariable X folgt einer **hypergeometrischen Verteilung** mit den Parametern M, N und n, wenn die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X durch

$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ für k = 0, 1, ..., M

gegeben ist.
Dabei sind k ≤ M, (n - k) ≤ (N - M) und n ≤ N.

Wenn auch nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, nimmt die Wahrscheinlichkeitsfunktion den Wert 0 an.
Man schreibt oft kurz: **h (k; M; N; n)**.

Geometrische Verteilung

Eine Zufallsvariable X= „Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg" folgt einer **geometrischen Verteilung** mit dem Parameter p, wenn die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X durch

$\boldsymbol{P(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot q^{k-1}}$ k = 1, 2, ...

gegeben ist.

Man bezeichnet sie als geometrische Verteilung, weil - wie bei einer geometrischen Folge mit q < 1 - bei wachsendem k die Wahrscheinlichkeiten gemäß einer geometrischen Folge abnehmen.
Man schreibt oft auch kurz: **G(p; k)**.

Die **Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung** mit dem Parameter p ist gegeben durch:

$F(k) = P(X \le k) = 1 - (1-p)^k = 1 - q^k$

Erwartungswert und **Varianz** der geometrischen Verteilung

$E(X) = \mu = \frac{1}{p}$ bzw. $E(X) = \mu = \frac{(1-p)}{p}$ $V(X) = \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Poissonverteilung

Eine Zufallsvariable X folgt einer **Poissonverteilung** mit dem Parameter λ, wenn die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X durch

$\boldsymbol{P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}}$ für k = 0, 1, ...

gegeben ist.
Man schreibt oft auch kurz **Po(λ ; k)** oder **P_λ(X = k)**

Die **Verteilungsfunktion der Poissonverteilung** mit dem Parameter λ ist dann gegeben durch:

$$F(k) = P(X \le k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Erwartungswert, Varianz und **Standardabweichung** der Poissonverteilung

$E(X) = \mu = \lambda$ $Var(X) = \mu^2 = \lambda$ $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$