Kapitel 7: Erweiterung der Differenzialrechnung

Ableitung ausgewählter Funktionen
Ableitung der Sinus- bzw. Cosinusfunktion

- $f(x) = \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$

Ableitung von Potenzfunktionen mit reellem Exponenten
$f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R} \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = r \cdot x^{r-1}}$

Ableitung einer Wurzelfunktion
$f(x) = \sqrt[n]{x}$, wobei $n \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{f'(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}}$
bzw. $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, $n,m \in \mathbb{N} \rightarrow f'(x) = \frac{m}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{m-n}}$

Ableitung einer beliebigen Exponentialfunktion
$f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{f'(x) = a^x \cdot \ln(a)}$
Ableitung einer natürlichen Exponentialfunktion
$f(x) = e^x$, wobei e die Euler'sche Zahl ist $\rightarrow f'(x) = e^x$

Ableitung einer Logarithmusfunktion zu einer beliebigen Basis
$f(x) = \log_a(x)$ mit $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\} \rightarrow \mathbf{f'(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x \cdot \ln(a)}}$
Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion
$f(x) = \ln(x) \rightarrow \mathbf{f'(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} = \mathbf{x^{-1}}$ für $x > 0$

Beispiele:

a) $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$; $f'(x) = -3 \cdot \sin(x)$

b) $f(x) = 5 \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)$; $f'(x) = 5 \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$

c) $f(x) = 3x^2 + 5x + 2 + 8 \cdot \cos(x) - 7 \cdot \sin(x)$; $f'(x) = 6x + 5 - 8 \cdot \sin(x) - 7 \cdot \cos(x)$

d) $f(x) = x^2 + 7 \cdot e^x$; $f'(x) = 2x + 7 \cdot e^x$

e) $f(x) = \sin(x) + 8 \cdot 2^x$; $f'(x) = \cos(x) + 8 \cdot 2^x \cdot \ln(2)$

f) $f(x) = 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x$; $f'(x) = 3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) + 2 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$

g) $f(x) = 4 \cdot e^x + 3$; $f'(x) = 4 \cdot e^x$

h) $f(x) = 4 \cdot x^{2,5}$; $f'(x) = 4 \cdot 2,5 \cdot x^{1,5} = 10 \cdot x^{1,5}$

i) $f(x) = 6 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 6 \cdot x^{3/4}$; $f'(x) = 4,5 \cdot x^{-1/4} = \frac{4,5}{\sqrt[4]{x}}$

Weitere Ableitungsregeln
Kettenregel
Sei $f(x) = u(v(x))$ eine verkettete Funktion, so gilt für die Ableitung: $\mathbf{f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$.

Da u(v) die äußere und v(x) die innere Funktion ist, kann man sich die Regel auch so merken:
„Ableitung einer verketteten Funktion = äußere Ableitung mal innere Ableitung."

Beispiele:

a) f(x) = sin(2x); äußere Funktion: sin( ) mit der Ableitung cos( ), innere Funktion 2x mit der Ableitung 2x
Daher: f'(x) = cos(2x)·2

b) $f(x) = e^{-0,5x^2}$; äußere Funktion $e^{\cdots}$ mit der Ableitung $e^{\cdots}$, innere Funktion – 0,5x² mit der Ableitung – x
Daher: $f'(x) = e^{-0,5x^2} \cdot (-x)$

c) 1) f(x) = sin²(x); äußere Funktion (..)² mit der Ableitung 2·(...), innere Funktion sin( ) mit der Ableitung cos( )
Daher: f'(x) = 2·sin(x)·cos(x)

2) f(x) = sin(x²); äußere Funktion sin( ) mit der Ableitung cos( ), innere Funktion x² mit der Ableitung 2x
Daher: f'(x) = cos(x²)·2x

Produktregel
Sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ eine Funktion, deren Funktionsgleichung aus dem Produkt der Funktionen u(x) und v(x) besteht, so gilt: $\mathbf{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$ (Produktregel).
Merkregel:
Ableitungsfunktion = 1. Funktion differenziert mal 2. Funktion unverändert + 1. Funktion unverändert mal- 2. Funktion differenziert

.
Beispiele:
a) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$; $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = 4x^2 \cdot e^x$; $f'(x) = 8x \cdot e^x + 4x^2 \cdot e^x = 4x \cdot e^x \cdot (2 + x)$

Selbstverständlich ist eine Kombination mit der Kettenregel möglich:
c) $f(x) = 3x^2 \cdot e^{-0{,}25x}$; $f'(x) = 6x \cdot e^{-0{,}25x} + 3x^2 \cdot e^{-0{,}25x} \cdot (-0{,}25) = 3x \cdot e^{-0{,}25x} \cdot (2 - 0{,}25x)$

Quotientenregel
Sei $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$ eine Funktion, deren Gleichung durch den Quotienten der Funktionen u(x) und v(x) beschrieben wird, so gilt: $\mathbf{f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$.

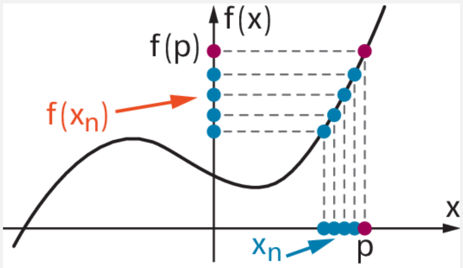
Beispiele:
a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; $f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

b) $f(x) = \frac{8x^3}{(x^2 + 1)^2}$; $f'(x) = \frac{24x^2 \cdot (x^2 + 1)^2 - 8x^3 \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{24x^2 \cdot (x^2 + 1) - 32x^4}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-8x^4 + 24x^2}{(x^2 + 1)^3}$

Hinweis:
Der Nenner sollte nie ausmultipliziert werden, denn dann erkennt man allfällige Möglichkeiten zu kürzen nicht mehr. Grundsätzlich gilt, dass sich der Grad des Nenners von einer Ableitung zur nächsten NUR um 1 erhöhen darf!

Grenzwert einer Funktion
Sei f eine reelle Funktion mit der Definitionsmenge D und x_n eine konvergente Folge, deren Glieder in D liegen ($x_n \in D$) und die den Grenzwert p besitzt, d.h., $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Es wird $\mathbf{a = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)}$ als Grenzwert der Funktion f bezeichnet.



Stetigkeit und Differenzierbarkeit
Stetigkeit
(1) Eine reelle Funktion f heißt **stetig an einer Stelle p**, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to p} f(x)$ existiert und gleich f(p) ist. Es muss somit: $\mathbf{\lim_{x\to p} f(x) = f(p)}$ gelten.

(2) Eine **stetige Funktion** ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig.
Die Eigenschaft (1) muss somit für alle p aus der Definitionsmenge erfüllt sein.

Polstelle und Unstetigkeitsstelle
Eine **Unstetigkeitsstelle** u liegt vor, wenn $\mathbf{\lim_{x\to u} f(x) \neq f(u)}$ gilt.
Eine Funktion ist unstetig, wenn sie mindestens eine Unstetigkeitsstelle besitzt. Eine Polstelle kann keine Unstetigkeitsstelle sein, da sie nicht in der Definitionsmenge enthalten ist.

Hinweis:
Polstellen treten im Allgemeinen an den Nullstellen des Nenners einer rationalen Funktion auf.

Beispiel:
$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-4x}$; Der Nenner ist hier für x = 0 und x = 4 gleich null, dies sind die beiden Polstellen.

Differenzierbarkeit
(1) Eine reelle Funktion f heißt **differenzierbar** an einer Stelle p, wenn f'(p) existiert.
(2) Eine differenzierbare Funktion ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar.
Die Eigenschaft (1) muss somit für alle p aus der Definitionsmenge erfüllt sein.

Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit
Jede differenzierbare Funktion ist stetig, jedoch ist nicht jede stetige Funktion differenzierbar.