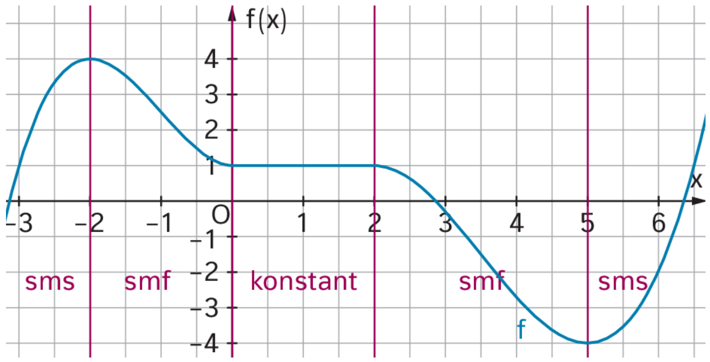
Kapitel 3: Untersuchen von Polynomfunktionen

Eigenschaften von Polynomfunktionen sind:

Monotonie
Gegeben sind eine Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $I \subseteq A$.
Für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und

- $f(x_1) < f(x_2)$ heißt f in I **streng monoton steigend**.
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ heißt f in I **monoton steigend**.
- $f(x_1) > f(x_2)$ heißt f in I **streng monoton fallend**.
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ heißt f in I **monoton fallend**.
- $f(x_1) = f(x_2)$ heißt f in I **konstant**.

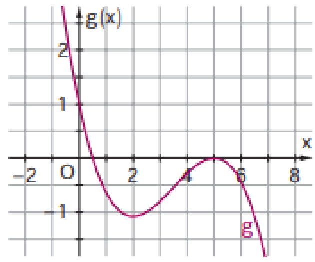
Beispiel:
Für den abgebildeten Graphen der Funktion f gilt:



Monotoniesatz
Für eine Polynomfunktion $f: A \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $I \subseteq A$ gilt:

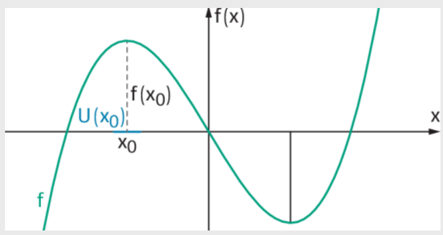
- Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f **streng monoton steigend** in I.
- Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, dann ist f **streng monoton fallend** in I.

Beispiel:
Für den gegebenen Graphen der Funktion g gilt:
g ist streng monoton fallend in (– ∞; 2) und (5; ∞),
denn g'(x) < 0 für alle x in diesen Intervallen.
g ist streng monoton steigend in (2; 4),
denn g'(x) > 0 für alle x in diesem Intervall.

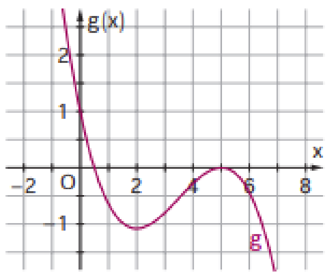


Extremstellen
Die Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ ist eine Polynomfunktion.
Eine Stelle x_0 heißt

- **Lokale Maximumstelle** von f, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, sodass für alle $x \in U(x_0)$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$.
- **Lokale Minimumstelle** von f, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, sodass für alle $x \in U(x_0)$ gilt: $f(x) \geq f(x_0)$.



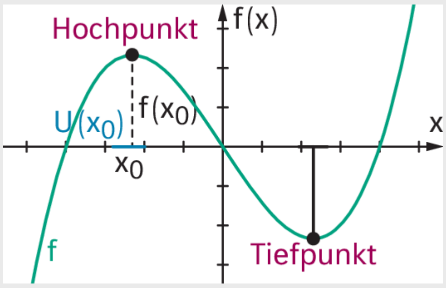
Beispiel:
Die Funktion g hat an der Stelle x = 2 eine lokale Minimumstelle und in x = 5 eine lokale Maximumstelle.



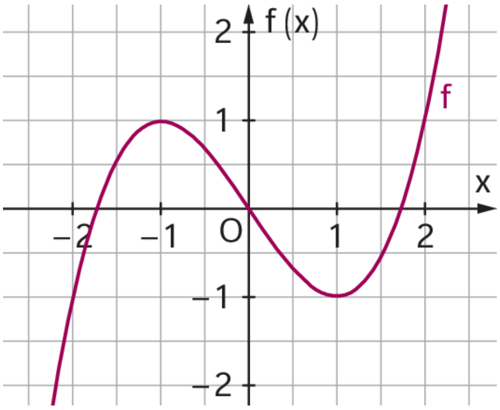
E. DORNER westermann wien

Ist x_0 eine lokale Maximumstelle, so nennt man den dazugehörigen Funktionswert $f(x_0)$ ein **lokales Maximum**.
Der Punkt $(x_0|f(x_0))$ des Graphen von f heißt **Hochpunkt**.

Ist $x_0$eine lokale Minimumstelle, so nennt man den dazugehörigen Funktionswert $f(x_0)$ ein **lokales Minimum**.
Der Punkt $(x_0|f(x_0))$ des Graphen von f heißt **Tiefpunkt**.



Beispiel:
Die Funktion g hat in (-1|1) einen Hochpunkt und in (1|-1) einen Tiefpunkt.

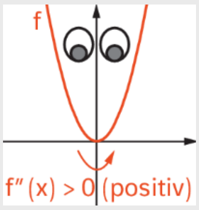


Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen
Die Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ ist eine Polynomfunktion, $I \subseteq A$ ein Intervall und $x_0 \in I$.

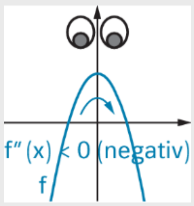
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 eine **lokale Maximumstelle** von f.
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 eine **lokale Minimumstelle** von f.

Krümmung und Wendepunkte

Die Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ ist eine Polynomfunktion, $I \subseteq A$ ein Intervall.
Ist $f''(x) > 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$,
dann ist f **linksgekrümmt** in I.

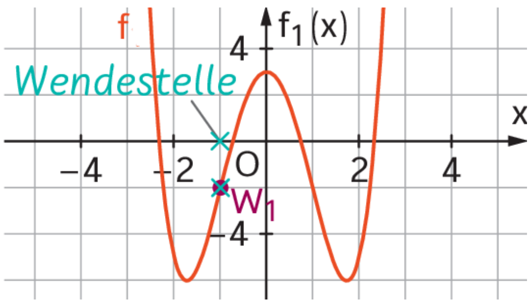


Ist $f''(x) < 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$,
dann ist f **rechtsgekrümmt** in I.



Die Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ ist eine Polynomfunktion.
Eine Stelle $x_0 \in A$ nennt man **Wendestelle** von f, wenn sich an dieser das Krümmungverhalten von f ändert.
Der dazugehörige Punkt $W = (x_0|f(x_0))$ am Funktionsgraphen heißt **Wendepunkt** des Graphen von f.

Beispiel:
Die Funktion f besitzt an der Stelle x = -1 eine Wendestelle mit dem Wendepunkt W_1 = (-1|-2).
Eine weitere Wendestelle ist in x = 1 mit dem Wendepunkt W_2 = (1|-2).



E. DORNER
westermann wien

Notwendige Bedingung für Wendestellen
Die Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ ist eine Polynomfunktion und $x_0 \in A$.
Ist x_0 eine Wendestelle von f, dann gilt: $f''(x) = 0$.

Symmetrie

Eine Polynomfunktion f kann entweder
- **symmetrisch zur y-Achse** sein, dann gilt f(–x) = f(x) und alle Exponenten sind gerade Zahlen, oder
- **symmetrisch zum Ursprung**, dann gilt f(–x) = – f(x) und alle Exponenten sind ungerade Zahlen.

Beispiel:
$f(x) = -0{,}5x^3 + 4x$ ist symmetrisch zum Ursprung
$f(x) = 0{,}25x^4 - 0{,}75x^2 + 2$ ist symmetrisch zur y-Achse

Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen von Polynomfunktionen

Grad des Polynoms	Nullstellen über $\mathbb{R}$	Extremstellen über $\mathbb{R}$	Wendestellen über $\mathbb{R}$
2	0 oder 2	1	0
3	1 oder 3	0 oder 2	1
4	0 oder 2 oder 4	1 oder 3	0 oder 2
n	n oder (n – 2) oder (n – 4) oder ...	(n – 1) oder (n – 3) oder (n – 5) oder ...	(n – 2) oder (n – 4) oder (n – 6) oder ...

Auffinden von Polynomfunktionen – Umkehraufgaben
Die Anzahl der erforderlichen Bedingungen ergibt sich aus der Anzahl der Koeffizienten der gesuchten Polynomfunktion. Die Bedingungen können im Zusammenhang mit der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktionen f' und f'' gegeben sein. Im Allgemeinen entsteht ein System von n Gleichungen in n Variablen, das sinnvollerweise mittels Technologie gelöst wird.

Modellieren mit Polynomfunktionen – Extremwertaufgaben
Extremwertaufgaben sind Anwendungsaufgaben, in denen Funktionen daraufhin untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Größe minimal klein oder maximal groß ist.
Folgender Algorithmus kann für das Lösen der Aufgaben hilfreich sein.

(1) Hauptbedingung (HB) angeben: Die Hauptbedingung drückt aus, welche Größe maximal oder minimal werden soll. Schreibe die Hauptbedingung als Funktion („Zielfunktion") an.
Bestimme die Anzahl u der unabhängigen Variablen, denn du benötigst für die Lösung der Extremwertaufgaben (u – 1) Nebenbedingungen.
(2) Nebenbedingung (NB) suchen: Die Nebenbedingung stellt einen Zusammenhang zwischen den unabhängigen Variablen der Hauptbedingung dar.
Als Nebenbedingung kommen häufig vorgegebene Randbedingungen (Länge, Fläche, Volumen, ...), der Lehrsatz des Pythagoras (rechtwinkelige Dreiecke müssen gefunden werden, oder in der Skizze liegt eine "eckige Figur" in einem Kreis) oder der Strahlensatz/ähnliche Dreiecke (in einer Skizze liegt eine "eckige Figur" ist einer "eckigen Figur") vor.
Hinweis: Für die beiden letztgenannten Fälle gibt es auch sehr seltene Ausnahmefälle.
(3) Zielfunktion und Definitionsbereich angeben: Die umgeformte Nebenbedingung wird in die Hauptbedingung eingesetzt. Man erhält eine Zielfunktion, die nur von einer Variablen abhängt.
Die Zielfunktion kann nun in vielen Fällen vereinfacht werden, indem man *multiplikative* Konstante weglässt. Dies ist wegen $f(x) = c \cdot g(x)$ mit $f'(x) = c \cdot g'(x) = 0$ zulässig.
(4) Extremstelle(n) bestimmen durch die Berechnung der ersten und zweiten Ableitung der Zielfunktion.
Randextrema müssen beachtet werden.
(5) Berechne die andere gesuchte Größe, falls gefordert. auch den Wert der Zielfunktion.