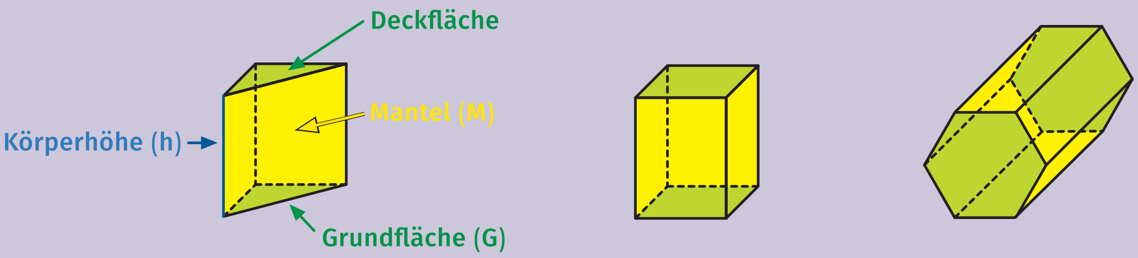
Eigenschaften mathematischer Körper

Merke

Eigenschaften von Prismen

Ein gerades Prisma hat immer eine Grund- und eine Deckfläche, die deckungsgleich und parallel zueinander sind. Den Abstand zwischen Grund- und Deckfläche nennt man Körperhöhe. Der Mantel setzt sich aus Rechtecken zusammen.



dreiseitiges Prisma

vierseitiges Prisma
= Quader

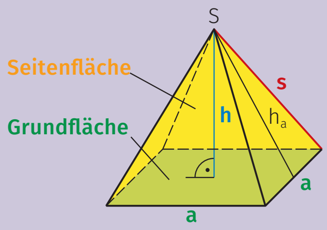
regelmäßiges
sechsseitiges Prisma

Ein Prisma, dessen Kanten alle gleich lang sind, nennt man **Würfel** oder Kubus.

Merke

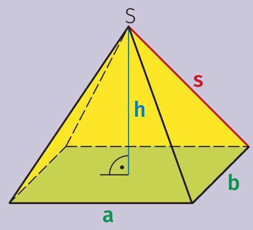
Eigenschaften einer Pyramide

Eine Pyramide ist ein spitzer Körper mit einem Vieleck als Grundfläche. Die Mantelfläche besteht immer aus Dreiecken.



regelmäßige quadratische
Pyramide

S ... Spitze
a ... Grundflächenkante
h ... Körperhöhe
s ... Seitenkante
h_a ... Seitenflächenhöhe

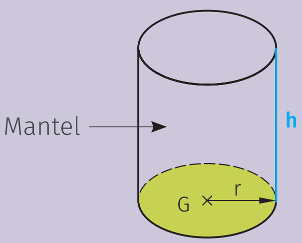


rechteckige
Pyramide

Merke

Eigenschaften eines Zylinders

Ein Zylinder hat als Grund- und Deckfläche jeweils einen Kreis. Diese sind deckungsgleich und parallel zueinander. Den Abstand zwischen Grund- und Deckfläche nennt man Körperhöhe. Der Mantel des Zylinders hat die Form eines Rechtecks.

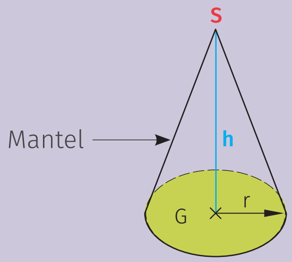


G ... Grundfläche
r ... Radius der Grundfläche (= Kreis)
h ... Körperhöhe

Merke

Eigenschaften eines Kegels

Ein Kegel ist ein spitzer Körper mit einem Kreis als Grundfläche. Der Mantel des Kegels hat die Form eines Kreisausschnitts (Kreissektors).



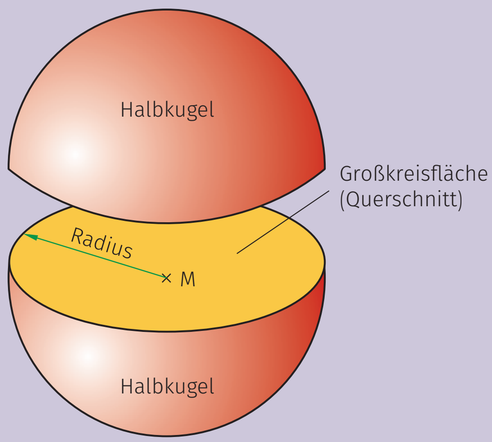
S ... Spitze
G ... Grundfläche
r ... Radius der Grundfläche (= Kreis)
h ... Körperhöhe

Merke

Eigenschaften einer Kugel

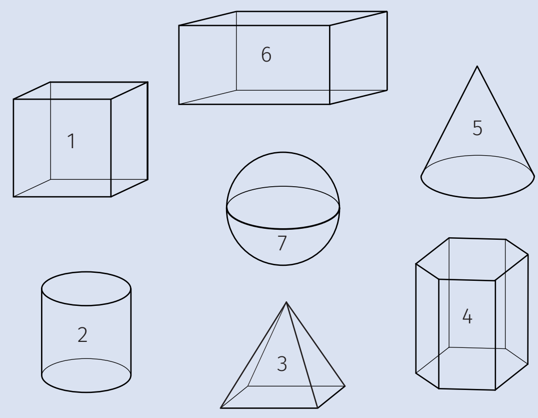
Alle Punkte an der Oberfläche einer Kugel sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt.

Die Entfernung vom Mittelpunkt der Kugel zur Oberfläche heißt Radius.



1 **Benenne die Körper!**

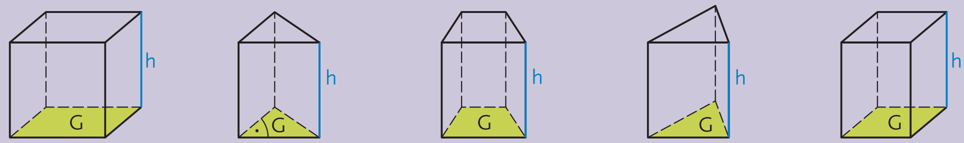
1:	
2:	
3:	
4:	
5:	
6:	
7:	



Volumen von Prismen

Merke

Um das **Volumen (V)** eines Prismas zu erhalten, multipliziert man den Inhalt der **Grundfläche (G)** mit der **Körperhöhe (h)**.



Für alle Prismen gilt: $\boxed{V = G \cdot h}$

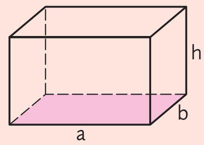
Rettungsbeispiel

Berechne das Volumen des vierseitigen Prismas mit einer rechteckigen Grundfläche (= Quader)!

a = 6 cm
b = 4 cm
h = 3 cm
V = ?

$\mathbf{V = G \cdot h}$
$V = 24\ cm^2 \cdot 3\ cm$
$\mathbf{V = 72\ cm^3}$

$G_{Rechteck} = a \cdot b$
$G = 6 \cdot 4$
$G = 24\ cm^2$



2 **Berechne jeweils das Volumen des vierseitigen Prismas!**

a)	a = 5 cm, b = 2 cm, h = 10 cm (Grundfläche: Rechteck)
b)	a = 6 cm, h = 8 cm (Grundfläche: Quadrat)
c)	a = 6,5 cm, b = 4 cm, h = 15 cm (Grundfläche: Rechteck)
d)	a = 4,5 cm, h = 7 cm (Grundfläche: Quadrat)

Rettungsbeispiel

Berechne die Höhe des Quaders!

$V = 234\ cm^3$
a = 6,5 cm
b = 3 cm
h = ?

1. Formel umformen

$V = G \cdot h \quad | :G$

$\mathbf{\frac{V}{G} = h}$

2. Zahlen einsetzen

$h = \frac{V}{G} \qquad G = a \cdot b$

$h = \frac{234}{6{,}5 \cdot 3} = \mathbf{12\ cm}$

3 **Berechne die gesuchte Höhe des Quaders!**

a)	$V = 252\ cm^3$ a = 7 cm b = 3 cm	b)	$V = 360{,}8\ cm^3$ a = 8,2 cm b = 4 cm	c)	$V = 140\ cm^3$ a = 7 cm b = 2,5 cm	d)	$V = 940{,}5\ cm^3$ a = 11 cm b = 4,5 cm

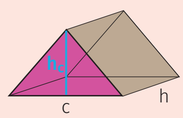
Rettungsbeispiel

Berechne das Volumen des dreiseitigen Prismas!

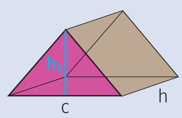
c = 6 cm
$h_c = 4$ cm
h = 8 cm
V = ?

$\mathbf{V = G \cdot h}$
$V = 12\ cm^2 \cdot 8\ cm$
$\mathbf{V = 96\ cm^3}$

$G_{Dreieck} = \frac{c \cdot h_c}{2}$
$G = \frac{6 \cdot 4}{2}$
$G = 12\ cm^2$



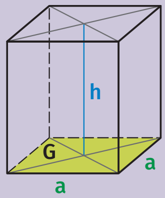
4 **Berechne jeweils das Volumen des dreiseitigen Prismas!**

a)	c = 8 cm $h_c = 4$ cm h = 10 cm	b)	c = 9 cm $h_c = 5$ cm h = 12 cm	c)	c = 14 cm $h_c = 6{,}6$ cm h = 20 cm	

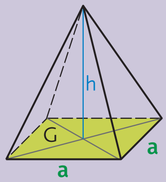
Volumen von Pyramiden

Merke

Das **Volumen einer Pyramide** entspricht $\frac{1}{3}$ des Volumens eines Quaders mit **gleicher Grundfläche** und **gleicher Körperhöhe**.



$V = G \cdot h$



$\boxed{V = \frac{G \cdot h}{3}}$

Durch Umkehrung der Volumsformel kann die Körperhöhe oder der Grundflächeninhalt der Pyramide berechnet werden.

$\boxed{h = \frac{3V}{G}}$ $\boxed{G = \frac{3V}{h}}$

Rettungsbeispiel

Berechne das Volumen einer vierseitigen Pyramide mit einem Quadrat als Grundfläche!

a = 6 cm
h = 10 cm
V = ?

$V = \frac{G \cdot h}{3}$

$V = \frac{36 \cdot 10}{3}$

$\mathbf{V = 120\ cm^3}$

$G_{Quadrat} = a \cdot a$

$G = 6 \cdot 6$

$G = 36\ cm^2$

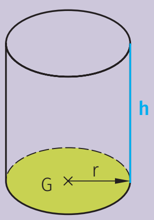
5 **Berechne das Volumen einer vierseitigen Pyramide!**

a)	a = 7 cm, b = 4 cm, h = 12 cm (Grundfläche: Rechteck)
b)	a = 6 cm, h = 9 cm (Grundfläche: Quadrat)
c)	a = 12 cm, b = 9 cm, h = 20 cm (Grundfläche: Rechteck)
d)	a = 8 cm, h = 15 cm (Grundfläche: Quadrat)

Volumen eines Zylinders

Merke

Das Volumen eines Zylinders wird wie das Volumen eines geraden Prismas berechnet.
Die Grundfläche ist beim Zylinder allerdings keine eckige Fläche sondern ein Kreis.



$V = G \cdot h$

$\boxed{V = r^2 \cdot \pi \cdot h}$

Durch **Umkehrung der Volumgsgleichung** kann der Radius oder die Körperhöhe des Zylinders berechnet werden.

gegeben: V, h
gesucht: r

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \quad | : (\pi \cdot h)$

$\frac{V}{\pi \cdot h} = r^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\boxed{r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}}$

gegeben: V, r
gesucht: h

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

$\boxed{h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}}$

Rettungsbeispiel

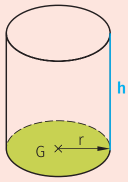
Berechne das Volumen des Zylinders!

$r = 5$ cm
$h = 10$ cm
$V = ?$

$\mathbf{V = r^2 \cdot \pi \cdot h}$

$V = 5^2 \cdot \pi \cdot 10$

$\mathbf{V = 785{,}4\ cm^3}$



6 Berechne das Volumen der Zylinder! Runde auf eine Nachkommastelle.

a)	$r = 7$ cm $h = 3$ cm	b)	$r = 6$ cm $h = 9$ cm	c)	$r = 9$ cm $h = 12{,}5$ cm	d)	$r = 3$ cm $h = 7{,}4$ cm

Rettungsbeispiel

Das Volumen und die Körperhöhe eines Zylinders sind gegeben. Berechne den Radius der Grundfläche!

$V = 502\ cm^3$
$h = 10$ cm
$r = ?$

1. Formel umformen

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

$\mathbf{r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}}$

2. Zahlen einsetzen

$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$

$r = \sqrt{\frac{502}{\pi \cdot 10}}$

$\mathbf{r \approx 4\ cm}$

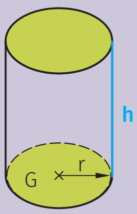
7 Berechne die unbekannte Größe des Zylinders! Runde auf eine Nachkommastelle.

a)	$V = 450\ cm^3$ $h = 6$ cm $r = ?$	b)	$V = 571\ cm^3$ $h = 9$ cm $r = ?$	c)	$V = 260\ cm^3$ $r = 6$ cm $h = ?$	d)	$V = 325\ cm^3$ $r = 4$ cm $h = ?$

Volumen eines Kegels

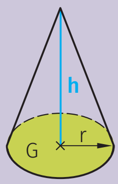
Merke

Das Volumen eines Kegels entspricht $\frac{1}{3}$ des Volumens eines Zylinders mit **gleicher Grundfläche** und **gleicher Körperhöhe**.



$V = G \cdot h$

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$



$V = \frac{G \cdot h}{3}$

$\boxed{\mathbf{V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}}}$

Rettungsbeispiel

Berechne das Volumen des Kegels!

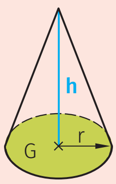
$r = 6$ cm
$h = 10$ cm
$V = ?$

$\mathbf{V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}}$

$V = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot 10}{3}$

$V = \frac{36 \cdot \pi \cdot 10}{3}$

$\mathbf{V \approx 377\ cm^3}$



8 Berechne das Volumen des Kegels! Runde auf eine Nachkommastelle.

a)	$r = 5$ cm $h = 9$ cm	b)	$r = 4$ cm $h = 12$ cm	c)	$r = 6$ cm $h = 20$ cm	d)	$r = 7$ cm $h = 15$ cm

Volumen einer Kugel

Merke

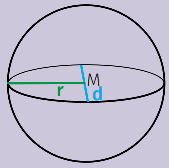
Das Volumen einer Kugel kann mit folgenden Formeln berechnet werden:

Wenn der **Radius** bekannt ist:

$$\boxed{V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}}$$

Wenn der **Durchmesser** bekannt ist:

$$\boxed{V = \frac{d^3 \cdot \pi}{6}}$$



Rettungsbeispiel

Berechne das Volumen der Kugel bei gegebenem Radius!

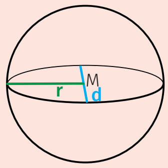
r = 8 cm
V = ?

$$V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot 8^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{2048 \cdot \pi}{3}$$

$$V \approx 2145 \text{ cm}^3$$

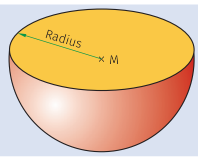


9 **Berechne das Volumen der Kugel bei gegebenem Radius!** Runde auf ganze cm^3.

a)	r = 6 cm	b)	r = 5 cm	c)	r = 9 cm	d)	r = 7 cm

10 **Berechne das Volumen der Halbkugel bei gegebenem Radius!**
Runde auf ganze cm^3! Tipp: Dividiere das Volumen einfach durch 2!

a)	r = 8 cm	b)	r = 4 cm	c)	r = 10 cm	d)	r = 6 cm



Rettungsbeispiel

Berechne das Volumen der Kugel bei gegebenem Durchmesser!

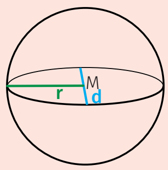
d = 6 cm
V = ?

$$V = \frac{d^3 \cdot \pi}{6}$$

$$V = \frac{6^3 \cdot \pi}{6}$$

$$V = \frac{216 \cdot \pi}{6}$$

$$V \approx 113 \text{ cm}^3$$



11 **Berechne das Volumen der Kugel bei gegebenem Durchmesser!**
Runde auf eine Stelle nach dem Komma.

a)	d = 10 cm	b)	d = 9 cm	c)	d = 14 cm	d)	d = 12 cm

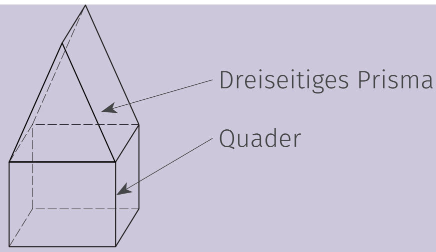
Volumen zusammengesetzter Körper

Merke

Setzt sich ein Körper aus mehreren Teilkörpern zusammen, so wird zuerst das Volumen jedes einzelnen Körpers berechnet.
Im Anschluss werden die Volumen addiert.

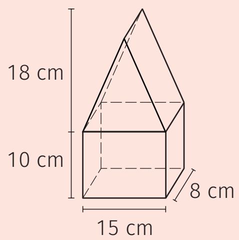
Für den abgebildeten Körper bedeutet das:

$\mathbf{V_{Quader} + V_{Prisma} = V_{Körper\ gesamt}}$



Rettungsbeispiel

Berechne das Volumen des zusammengesetzten Körpers!



Quader:

$\mathbf{V = a \cdot b \cdot h}$

$V = 15 \cdot 8 \cdot 10$

$V = 1200\ cm^3$

Dreiseitiges Prisma:

$\mathbf{V = G \cdot h}$

$G_{Dreieck} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$G_{Dreieck} = \frac{15 \cdot 18}{2}$

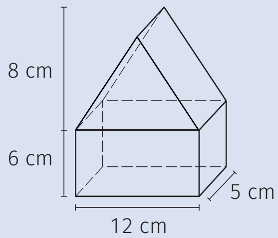
$G_{Dreieck} = 135\ cm^2$

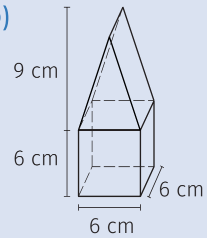
$V = 135 \cdot 8$

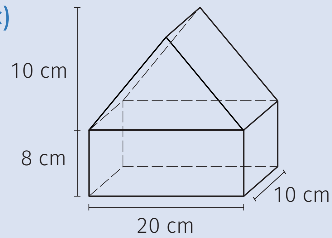
$V = 1080\ cm^3$

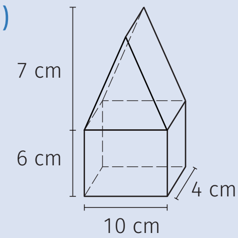
$\mathbf{V_{gesamt}} = V_{Quader} + V_{dreiseitiges\ Prisma} = 1200\ cm^3 + 1080\ cm^3 = \mathbf{2280\ cm^3}$

12 **Berechne jeweils das Volumen der zusammengesetzten Körper!**

a)


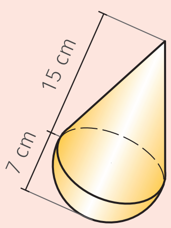
b)


c)


d)


Rettungsbeispiel

Berechne das Volumen des zusammengesetzten Körpers!



Halbkugel:
r = 7 cm

$\mathbf{V_{Kugel} = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}}$

$V_{Kugel} = \frac{4 \cdot 7^3 \cdot \pi}{3}$

$V_{Kugel} = 1436{,}8\ cm^3$

$V_{Halbkugel} = 718{,}4\ cm^3$

Kegel:
r = 7 cm; h = 15 cm

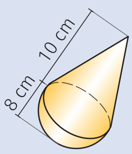
$\mathbf{V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}}$

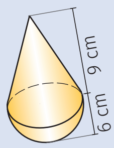
$V = \frac{7^2 \cdot \pi \cdot 15}{3}$

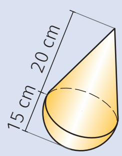
$V = 769{,}7\ cm^3$

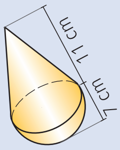
$\mathbf{V_{gesamt}} = V_{Halbkugel} + V_{Kegel} = 718{,}4\ cm^3 + 769{,}7\ cm^3 = \mathbf{1488{,}1\ cm^3}$

13 **Berechne jeweils das Volumen der zusammengesetzten Körper!**

a)


b)


c)


d)


Lösungen

1

1: Würfel, vierseitiges Prisma
2: Zylinder
3: vierseitige Pyramide
4: sechsseitiges Prisma
5: Kegel
6: Quader, vierseitiges Prisma
7: Kugel

2	a)	$V = 100\ cm^3$	b)	$V = 288\ cm^3$	c)	$V = 390\ cm^3$	d)	$V = 141{,}75\ cm^3$
3	a)	$h = 12\ cm$	b)	$h = 11\ cm$	c)	$h = 8\ cm$	d)	$h = 19\ cm$
4	a)	$V = 160\ cm^3$	b)	$V = 270\ cm^3$	c)	$V = 924\ cm^3$		
5	a)	$V = 112\ cm^3$	b)	$V = 108\ cm^3$	c)	$V = 720\ cm^3$	d)	$V = 320\ cm^3$
6	a)	$V = 461{,}8\ cm^3$	b)	$V = 1017{,}9\ cm^3$	c)	$V = 3180{,}9\ cm^3$	d)	$V = 209{,}2\ cm^3$
7	a)	$r = 4{,}9\ cm$	b)	$r = 4{,}5\ cm$	c)	$h = 2{,}3\ cm$	d)	$h = 6{,}5\ cm$
8	a)	$V = 235{,}6\ cm^3$	b)	$V = 201{,}1\ cm^3$	c)	$V = 754\ cm^3$	d)	$V = 769{,}7\ cm^3$
9	a)	$V = 905\ cm^3$	b)	$V = 524\ cm^3$	c)	$V = 3054\ cm^3$	d)	$V = 1437\ cm^3$
10	a)	$V = 1072\ cm^3$	b)	$V = 134\ cm^3$	c)	$V = 2094\ cm^3$	d)	$V = 452\ cm^3$
11	a)	$V = 523{,}6\ cm^3$	b)	$V = 381{,}7\ cm^3$	c)	$V = 1436{,}8\ cm^3$	d)	$V = 904{,}8\ cm^3$
12	a)	$V = 600\ cm^3$	b)	$V = 378\ cm^3$	c)	$V = 2600\ cm^3$	d)	$V = 380\ cm^3$
13	a)	$V = 1742{,}5\ cm^3$	b)	$V = 791{,}7\ cm^3$	c)	$V = 11\,781\ cm^3$	d)	$V = 1282{,}8\ cm^3$

