



Gleichungen lösen durch Umformen

Merke

Zum Lösen der Gleichung werden **Äquivalenzumformungen** angewendet. Das heißt, man muss auf beiden Seiten der Gleichung dieselben Rechenoperationen vornehmen, damit die Gleichung äquivalent (gleichwertig) bleibt.

$$\begin{array}{l}
 -60 = 8x - 4 \\
 8x - 4 = -60 \quad | + 4 \\
 8x - 4 + 4 = -60 + 4 \\
 8x = -56 \quad | : 8 \\
 8x : 8 = -56 : 8 \\
 x = -7
 \end{array}$$

Man darf

- beide Seiten **vertauschen**
- auf beiden Seiten dieselbe Zahl **addieren** oder **subtrahieren**
- beide Seiten mit derselben Zahl ($\neq 0$) **multiplizieren** oder durch dieselbe Zahl ($\neq 0$) **dividieren**.

Probe:

$$\begin{array}{l}
 -60 = 8 \cdot (-7) - 4 \\
 -60 = -56 - 4 \\
 -60 = -60
 \end{array}$$

✓

Bei der Probe wird die **Lösung** für x in die Gleichung eingesetzt.

1 Löse die Gleichungen und kontrolliere mit der Probe!

a)	$4x = x + 12$	b)	$3x + 19 = 4x$	c)	$7x - 12 = 3x + 4$	d)	$5x + 10 = 2x + 13$
e)	$3x + 4 = 6x - 8$	f)	$8a - 19 = -4a + 5$	g)	$-5b - 24 = 3b$	h)	$11 - 9x = 5x + 39$

Rettungsbeispiel

Löse die Gleichung!

$5(2x - 4) = 10 + 4x$

1. Klammer auflösen
2. Durch Umformung alle Variablen x auf eine Seite und alle Zahlenwerte auf die andere Seite bringen
3. x berechnen

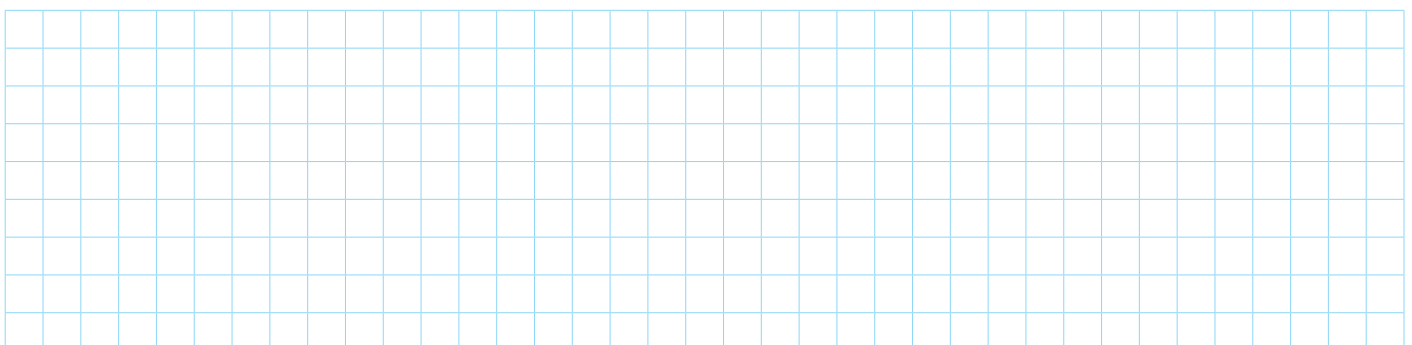
$$\begin{array}{l}
 10x - 20 = 10 + 4x \quad | + 20 \\
 10x = 30 + 4x \quad | - 4x \\
 6x = 30 \quad | : 6 \\
 x = 5
 \end{array}$$

2 Löse die Gleichungen!

a)	$5(x - 3) = 9 + 4x$	b)	$2x - 7 = 3(1 - x)$	c)	$7(x - 2) = 6 - 3x$
d)	$4(3 - 2x) = 2x + 22$	e)	$5 + x = 2(1 - x)$	f)	$3(x - 2) = x + 4$

3 Wie lautet jeweils die Lösung für die Variable x?

a)	$8x - 1 - 3(5x - 4) = 2(1 - 7x) - 26$	b)	$3 + 5x - 4(3x - 1) = 4(1 + x) + 80$
c)	$3a - 4(a + 1) = 7a - 2(a - 4)$	d)	$3(3x - 3) - 2x = 4(2x - 2) + 3$



Rettungs-
beispiel

Löse die Gleichung!

$$4x(3x - 2) = 12x^2 + 16$$

1. Klammer auflösen
2. Nachdem auf beiden Seiten gleich viele x^2 sind, heben sich diese auf.
3. Durch Umformung alle Variablen x auf eine Seite und alle Zahlenwerte auf die andere Seite bringen
4. x berechnen

$$4x(3x - 2) = 12x^2 + 16$$

$$\cancel{12x^2} - 8x = \cancel{12x^2} + 16$$

$$-8x = 16 \quad | :(-8)$$

$$x = -2$$

4 Löse die Gleichungen!

a)	$2x(x + 1) = 4 + 2x^2$	b)	$6x^2 - 9 = 3x(1 + 2x)$	c)	$x(x + 5) = 8 + x^2 + x$
d)	$3 - 8x^2 + x = 4x(1 - 2x)$	e)	$x(2x - 1) = 7x + 2x^2 + 8$	f)	$4 - 4x^2 = 2x(2x - 1)$

Gleichungen mit Brüchen lösen

Merke

1. Bei Gleichungen mit Brüchen wird zuerst der gemeinsame Nenner gesucht und auf diesen alle Brüche der Gleichung erweitert.
2. Anschließend wird die gesamte Gleichung mit dem Nenner multipliziert und somit die Gleichung bruchfrei gemacht.

1. Schritt \rightarrow

$$\frac{5x}{8} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{2}$$

$$\frac{5x}{8} = \frac{30}{8}$$

$$\frac{5x \cdot \cancel{8}}{\cancel{8}} = \frac{30 \cdot \cancel{8}}{\cancel{8}}$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

Gemeinsame Nenner: 8

$\cdot 8$

2. Schritt \leftarrow

$| : 5$

Rettungs-
beispiel

Löse die Gleichung!

$$\frac{2x}{4} - \frac{1}{3} = \frac{x}{6}$$

\rightarrow Gemeinsamer Nenner: 12

$$\frac{2x \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{x \cdot 2}{6 \cdot 2}$$

\rightarrow Mit jener Zahl erweitern, sodass alle Brüche den gleichen Nenner haben

$$\frac{6x}{12} - \frac{4}{12} = \frac{2x}{12}$$

$| \cdot 12 \rightarrow$ Die Nenner kürzen sich durch die Multiplikation mit der Zahl 12 weg

$$6x - 4 = 2x$$

$| + 4 \rightarrow$ Gleichung wie gewohnt lösen

$$6x = 2x + 4$$

$| - 2x$

$$4x = 4$$

$| : 4$

$$x = 1$$

5 Löse die Gleichungen mit Brüchen!

a)	$\frac{3x}{4} = \frac{1}{2}$	b)	$\frac{6x}{10} = \frac{4}{5}$	c)	$\frac{x}{6} = \frac{3}{2}$	d)	$\frac{x}{4} = \frac{3}{8}$
e)	$\frac{x}{3} = \frac{1}{5}$	f)	$\frac{x}{3} = \frac{1}{6}$	g)	$\frac{3}{5} = \frac{2x}{2}$	h)	$\frac{3}{7} = \frac{x}{21}$

6 Löse die Gleichungen!

a)	$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$	b)	$\frac{3x}{4} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$	c)	$\frac{5x}{2} - \frac{x}{4} = \frac{3}{4}$	d)	$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{3}{4}$
----	---	----	--	----	--	----	---

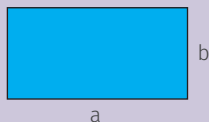


Formeln umformen

Merke

Nachdem jede Formel eine allgemeingültige Gleichung darstellt, kann sie mithilfe der Äquivalenzumformungen beliebig umgeformt und somit eine nicht bekannte Größe berechnet werden.

Z. B.: Umfang eines Rechtecks



b = ?

$$u = 2a + 2b \quad | - 2a$$

$$u - 2a = 2b \quad | : 2$$

$$b = \frac{u - 2a}{2}$$

**Rettings-
beispiel**

Forme die Formel so um, dass die Länge der Seite **c** eines Dreiecks berechnet werden kann, wenn **u, a** und **b** bekannt sind!

$$u = a + b + c$$

$$u = a + b + c \quad | - a$$

$$c = ?$$

$$u - a = b + c \quad | - b$$

$$u - a - b = c$$

7 Forme die Formeln so um, dass du die gesuchte Variable berechnen kannst!

a)	Flächeninhalt Deltoid: $A = \frac{e \cdot f}{2}$	$e = ?$
b)	Umfang Rechteck: $u = 2 \cdot (a + b)$	$b = ?$
c)	Umfang Dreieck: $u = a + b + c$	$b = ?$
d)	Flächeninhalt rechtwinkliges Dreieck: $A = \frac{a \cdot b}{2}$	$a = ?$

8 Forme die Formeln aus der Physik so um, dass du die gesuchte Variable berechnen kannst!

a)	Kraft: $F = m \cdot a$	$a = ?$
b)	Erdbeschleunigung: $g = \frac{G \cdot M}{r^2}$	$r = ?$
c)	Spannenergie: $E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$	$s = ?$
d)	Hebelgesetz: $M = F \cdot s$	$F = ?$

Gleichungen aufstellen

Merke

Textaufgaben kann man in eine Gleichung übersetzen und somit lösbar machen.

1. Für die unbekannte, gesuchte Größe setzt man eine Variable (Platzhalter), z. B. x, y, ..., ein.
2. Die Aufgabe wird mithilfe von Variablen, Zahlen und Operationszeichen in eine Gleichung übersetzt.

Z. B.: Zu welcher Zahl muss man 9 addieren, um 31 zu erhalten?

$$x \quad + 9 \quad = 31$$

Gleichung aufstellen: $x + 9 = 31 \quad | - 9$

Gleichung lösen: $x = 31 - 9$

$x = 22$ Die gesuchte Zahl lautet 22.

**9 Stelle eine Gleichung auf und löse sie anschließend!**

- | | |
|----|---|
| a) | Zu welcher Zahl muss man 11 addieren, um 31 zu erhalten? |
| b) | Von welcher Zahl muss man 8 subtrahieren, um 54 zu erhalten? |
| c) | Zu welcher Zahl muss man 19 addieren, um 37 zu erhalten? |
| d) | Von welcher Zahl muss man 12 subtrahieren, um 96 zu erhalten? |

10 Stelle eine Gleichung auf und berechne die Unbekannte!

- | | |
|----|--|
| a) | Das Vierfache einer Zahl addiert zu 2 ergibt 14. |
| b) | 21 ist gleich das Doppelte einer Zahl plus 3. |
| c) | 16 ist gleich wie das Doppelte der Summe von einer Zahl x und 2. |
| d) | Wenn man vom Viertel einer Zahl 3 abzieht, erhält man 2. |

11 Welche Gleichung passt zum Text?

- | | | | | |
|----|---|--|--|--|
| a) | Wird vom Doppelten einer Zahl 3 abgezogen, so erhält man 7. | A <input type="checkbox"/> $2x - 3 = 7$ | B <input type="checkbox"/> $3 - 2x = 7$ | C <input type="checkbox"/> $7 = 2x + 3$ |
| b) | Wird zu einer Zahl 11 addiert, so erhält man 19. | A <input type="checkbox"/> $11 - x = 19$ | B <input type="checkbox"/> $11 + x = 19$ | C <input type="checkbox"/> $19 = x - 11$ |

**Rettungs-
beispiel**

Oma ist viermal so alt wie ihr Enkel Tim. Zusammen sind sie 75 Jahre alt.
Wie alt ist Tim?

- | | |
|---|--|
| 1. Variable festlegen | Tim = x Oma = $4 \cdot x$ |
| 2. Gleichung aufstellen | $x + 4x = 75$ |
| 3. Gleichung lösen | $5x = 75 \quad :5$
$x = 15$ |
| 4. Antwortsatz schreiben: Tim ist 15 Jahre alt. | |

12 Frau Riedl ist dreimal so alt wie ihre Tochter Mia. Zusammen sind sie 36 Jahre alt. **Wie alt ist Mia?****13** Claudia hat um 5 Paar mehr Schuhe als ihre Freundin Sabi. Gemeinsam haben sie 13 Paar Schuhe. **Wie viele Paar Schuhe besitzt Claudia?****14** Helmut ist um 6 Jahre älter als sein Bruder Tom. Gemeinsam sind sie 58 Jahre alt. **Wie alt sind die beide jeweils?**



Lösungen

1	a)	$x = 4$	b)	$x = 19$	c)	$x = 4$	d)	$x = 1$
	e)	$x = 4$	f)	$a = 2$	g)	$b = -3$	h)	$x = -2$

2	a)	$x = 24$	b)	$x = 2$	c)	$x = 2$
	d)	$x = -1$	e)	$x = -1$	f)	$x = 5$

3	a)	$x = -5$	b)	$x = -7$	c)	$a = -2$	d)	$x = -4$
---	----	----------	----	----------	----	----------	----	----------

4	a)	$x = 2$	b)	$x = -3$	c)	$x = 2$
	d)	$x = 1$	e)	$x = -1$	f)	$x = -2$

5	a)	$x = \frac{2}{3}$	b)	$x = \frac{4}{3}$	c)	$x = 9$	d)	$x = \frac{3}{2}$
	e)	$x = \frac{3}{5}$	f)	$x = \frac{1}{2}$	g)	$x = \frac{3}{5}$	h)	$x = 9$

6	a)	$x = 3$	b)	$x = \frac{2}{5}$	c)	$x = \frac{1}{3}$	d)	$x = 9$
---	----	---------	----	-------------------	----	-------------------	----	---------

7	a)	$e = \frac{2A}{f}$	b)	$b = \frac{u}{2} - a$	c)	$b = u - a - c$	d)	$a = \frac{2A}{b}$
---	----	--------------------	----	-----------------------	----	-----------------	----	--------------------

8	a)	$a = \frac{F}{m}$	b)	$r = \sqrt{\frac{G \cdot M}{g}}$	c)	$s = \sqrt{\frac{2E}{D}}$	d)	$F = \frac{M}{s}$
---	----	-------------------	----	----------------------------------	----	---------------------------	----	-------------------

9	a)	$x + 11 = 31; x = 20$	b)	$x - 8 = 54; x = 62$
	c)	$x + 19 = 37; x = 18$	d)	$x - 12 = 96; x = 108$

10	a)	$4x + 2 = 14; x = 3$	b)	$21 = 2x + 3; x = 9$
	c)	$16 = 2(x + 2); x = 6$	d)	$\frac{x}{4} - 3 = 2; x = 20$

11	a)	A	b)	B
----	----	---	----	---

12 Mia ist 9 Jahre alt.

13 Claudia besitzt 9 Paar Schuhe.

14 Tom ist 26 Jahre alt und Helmut 32 Jahre.