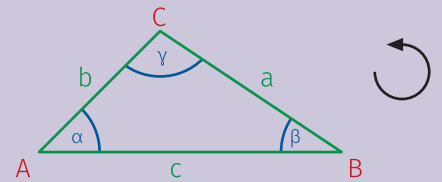




Eigenschaften von Dreiecken

Merke

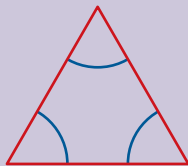
Ein Dreieck hat immer **3 Eckpunkte**, **3 Seiten** und **3 Innenwinkel**. Die Beschriftung eines Dreiecks erfolgt immer gegen den Uhrzeigersinn.



Dreiecke können einerseits nach den Eigenschaften ihrer **Seiten** und andererseits nach ihren **Winkeln** benannt werden.

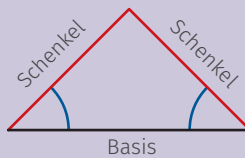
Einteilung nach den Seiten:

gleichseitiges Dreieck



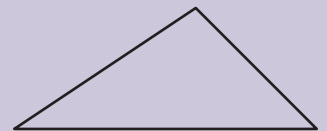
Alle drei Seiten sind gleich lang.
Alle drei Winkel sind gleich groß.

gleichschenkliges Dreieck



Zwei Seiten sind gleich lang.
(= Schenkel)
Zwei Winkel sind gleich groß.
(= Basiswinkel)

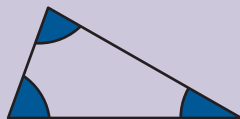
ungleichseitiges Dreieck



Alle drei Seiten sind unterschiedlich lang.

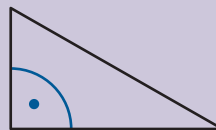
Einteilung nach den Winkeln:

spitzwinkliges Dreieck



Alle drei Winkel sind spitzwinklig,
also kleiner als 90°.

rechtwinkliges Dreieck



ein rechter Winkel (90°)

stumpfwinkliges Dreieck

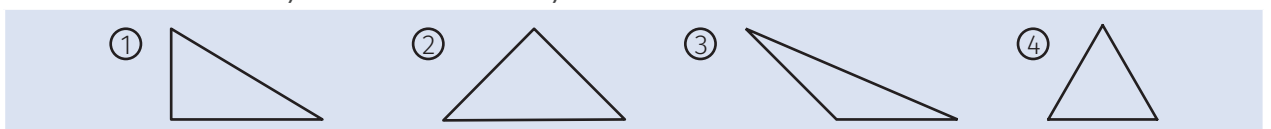


ein stumpfer Winkel,
also größer als 90°

1 Entscheide, ob die Aussagen richtig oder falsch sind!

		richtig	falsch
A	Die Seite b liegt gegenüber dem Winkel γ .		
B	Der Winkel α wird von den Seiten b und c eingeschlossen.		
C	Zwischen den Eckpunkten C und A liegt die Seite c.		
D	Der Seite a liegt der Winkel β gegenüber.		

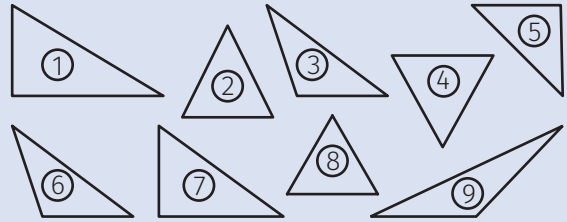
2 Benenne die Dreiecke a) nach ihren Seiten b) nach ihren Winkeln!






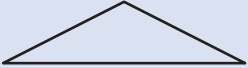
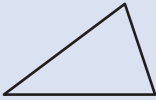
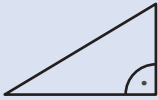
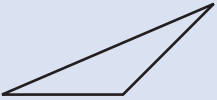


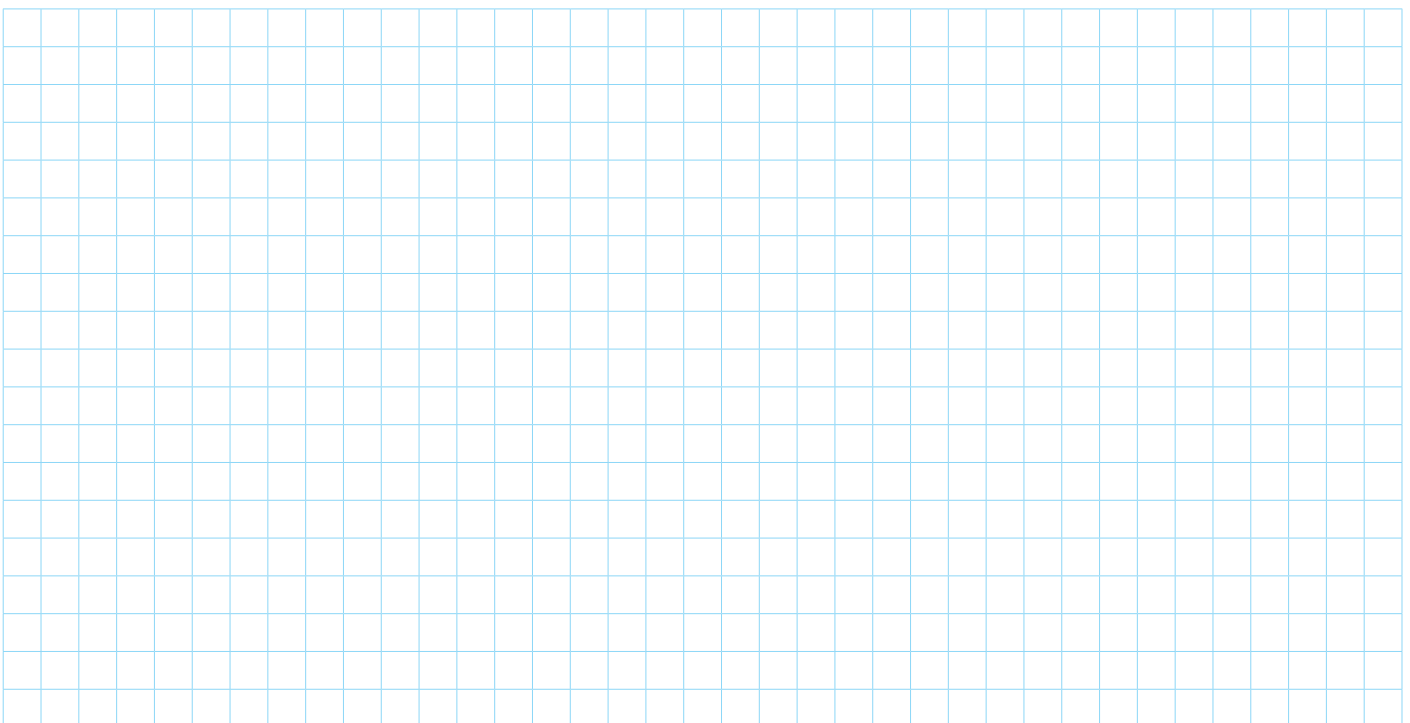
3 Ordne die Nummern der Dreiecke den Namen zu!

spitzwinkliges Dreieck			
rechtwinkliges Dreieck			
stumpfwinkliges Dreieck			



4 Kombiniere bei der Dreiecksbenennung die Eigenschaften der Seiten und der Winkel!

Seiten / Winkel	spitzwinklig	rechtwinklig	stumpfwinklig
gleichseitig	 spitzwinkliges, gleichseitiges Dreieck		
gleichschenkelig	 _____ _____	 _____ _____	 _____ _____
ungleichseitig	 _____ _____	 _____ _____	 _____ _____

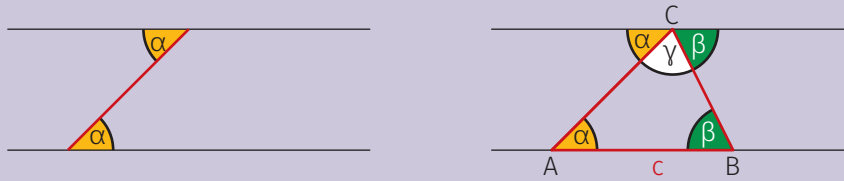




Summe der Innenwinkel im Dreieck

Merke

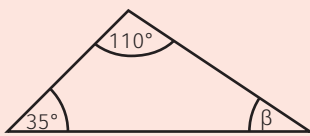
In einem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel α , β und γ immer 180° .



Zeichnet man eine Parallele zu c durch den Punkt C des Dreiecks, erkennt man, dass sich die drei Winkel im Eckpunkt C auf 180° ergänzen. Da die gleichfarbigen Winkel jeweils Parallelwinkel sind, muss die **Summe der Innenwinkel** des Dreiecks ebenfalls **180°** sein.

**Rettungs-
beispiel**

Wie groß ist der fehlende Winkel?



1. Du addierst die zwei gegebenen Winkel. $35^\circ + 110^\circ = 145^\circ$
2. Die Summe der gegebenen Winkel wird von der Summe der Innenwinkel = 180° subtrahiert. $180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$

Lösung: Der fehlende Winkel β hat 35° .

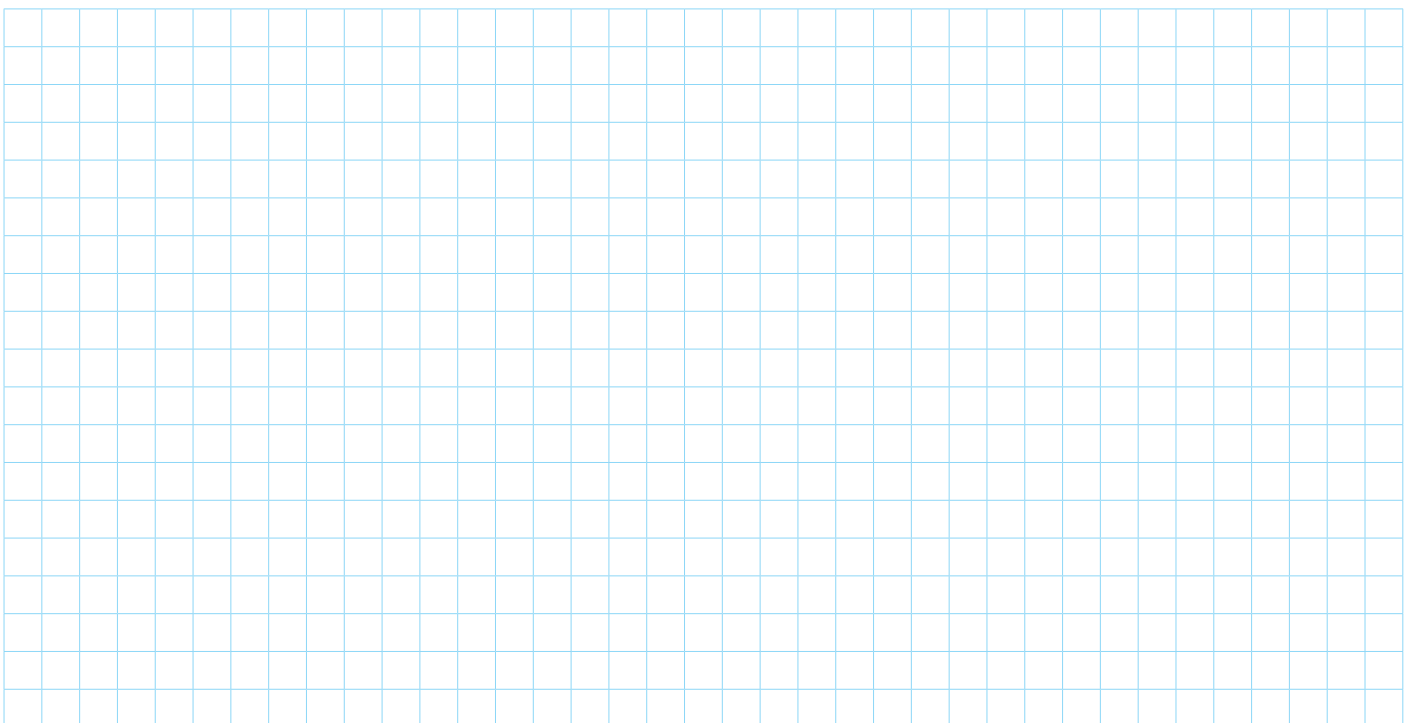
5 Wie groß sind die fehlenden Winkel?

a)

b)

c)

6 Von einem Dreieck sind die beiden Winkel $\alpha = 48^\circ$ und $\gamma = 105^\circ$ gegeben.
Berechne die Größe des fehlenden Winkels!



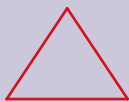


Dreieckskonstruktionen und Kongruenzsätze

Merke

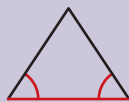
Damit man ein Dreieck **eindeutig konstruieren** kann, müssen **drei Größen, davon mindestens eine Seitenlänge**, gegeben sein.
Es gibt vier **Kongruenzsätze**:

drei Seiten



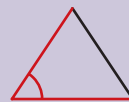
SSS-Satz
Seiten-Seiten-Seiten-Satz

eine Seite und die zwei anliegenden Winkel



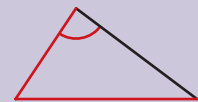
WSW-Satz
Winkel-Seiten-Winkel-Satz

zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel



SWS-Satz
Seiten-Winkel-Seiten-Satz

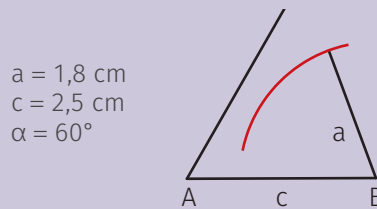
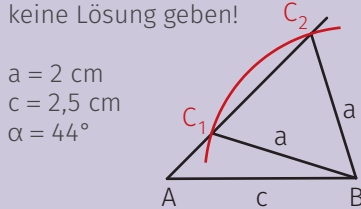
zwei Seiten und jener Winkel, welcher der längeren Seiten gegenüberliegt



SSW-Satz
Seiten-Seiten-Winkel-Satz

Dreiecke sind **kongruent (deckungsgleich)**, wenn deren Seiten und Winkel gleich groß sind.

Ein Dreieck ist mit dem SSW-Satz nur dann **eindeutig konstruierbar**, wenn der gegebene Winkel der längeren Seite gegenüberliegt. Ist das nicht der Fall, kann es zwei verschiedene Lösungen oder manchmal auch keine Lösung geben!



7 Welche Dreieckskonstruktionen siehst du hier?

a)	b)	c)	d)
_____ -Satz	_____ -Satz	_____ -Satz	_____ -Satz

8 Von einem Dreieck sind zwei Größen bekannt. Gib an, welche Größe noch fehlt, damit man das Dreieck konstruieren kann! Manchmal sind mehrere Antworten möglich!

a) b, c, ?	b) $\alpha, \beta, ?$	c) a, $\gamma, ?$	d) b, $\alpha, ?$
------------	-----------------------	-------------------	-------------------

9 Entscheide, ob eine Konstruktion mit folgenden Angaben möglich ist!

a) a = 3 cm b = 1 cm c = 4 cm <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	b) a = 6 cm b = 5 cm c = 2 cm <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	c) a = 23 mm b = 45 mm c = 77 mm <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	d) a = 11,6 cm b = 8,1 cm c = 5,5 cm <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein
--	--	---	---

HINWEIS Ein Dreieck ist nur dann konstruierbar, wenn folgende **Dreiecksungleichungen** gelten: $a < b + c$ $b < a + c$ $c < a + b$

10 Kennzeichne die gegebenen Größen in einer Skizze und finde heraus, ob die Dreiecke eindeutig konstruierbar sind!

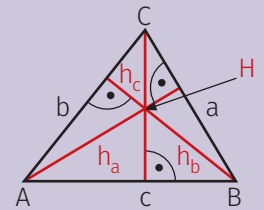
a) a = 3 cm b = 2 cm $\alpha = 54^\circ$ <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	b) a = 6 cm c = 5 cm $\gamma = 76^\circ$ <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	c) a = 23 mm b = 45 mm $\beta = 103^\circ$ <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	d) b = 11,6 cm c = 8,1 cm $\gamma = 92^\circ$ <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein
---	---	---	--



Die vier besonderen Punkte im Dreieck

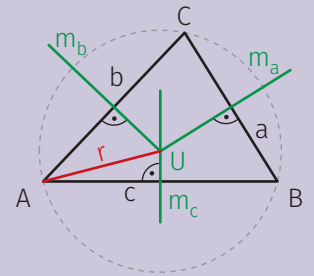
Merke Höhen und Höhenschnittpunkt

Die Höhe eines Dreiecks ist die kürzeste Verbindung von einem Eckpunkt zur gegenüberliegenden Seite. Die Höhe steht immer normal auf die Seite. Jedes Dreieck hat drei Höhen: h_a , h_b und h_c . Sie schneiden einander im **Höhenschnittpunkt (H)**.



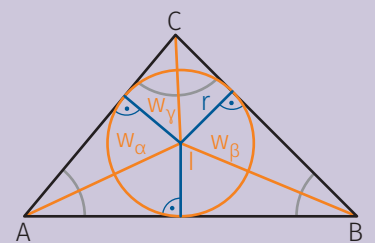
Merke Seitensymmetralen und Umkreismittelpunkt

Der Umkreis ist der kleinstmögliche Kreis um ein Dreieck. Er verläuft durch alle drei Eckpunkte. Jeder Punkt der **Seitensymmetralen** m_a , m_b und m_c ist von den Endpunkten der zugehörigen Dreiecksseiten gleich weit entfernt. Die Seitensymmetralen schneiden einander im **Umkreismittelpunkt (U)**, der somit von den drei Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt ist. Der Radius des Umkreises ist gleich der Entfernung zwischen Umkreismittelpunkt und den Eckpunkten des Dreiecks.



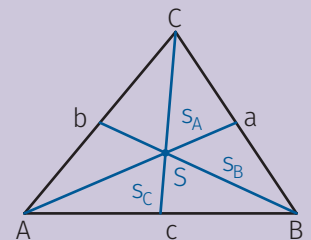
Merke Winkelsymmetralen und Inkreismittelpunkt

Der Inkreis ist der größtmögliche Kreis in einem Dreieck. Er berührt alle drei Seiten der Winkelsymmetralen w_a , w_b , und w_c hat von den beiden Schenkeln des Winkels den gleichen Normalabstand. Die Winkelsymmetralen schneiden einander im **Inkreismittelpunkt (I)**, der somit von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand hat. Der Radius des Inkreises ist gleich dem Normalabstand vom Inkreismittelpunkt zu den Dreiecksseiten.



Merke Schwerlinien und Schwerpunkt

Jede Schwerlinie teilt das Dreieck in zwei Hälften mit gleich großen Flächeninhalten. Die Schwerlinien eines Dreiecks schneiden einander alle im **Schwerpunkt (S)**. Die Schwerlinien, die von einem Eckpunkt des Dreiecks zur Mitte der gegenüberliegenden Seite gehen, nennt man s_A , s_B und s_C .



11 Wie nennt man den Punkt im Dreieck, der von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand hat?

12 Welche Aussagen zu den Höhen in einem Dreieck sind richtig, welche falsch?

		richtig	falsch
A	Die Höhen stehen immer normal auf die Dreiecksseiten.		
B	Die Höhen halbieren die Winkel im Dreieck.		
C	Die Höhen eines Dreiecks können auch außerhalb des Dreiecks liegen.		

13 Vervollständige den Satz! Die Schwerlinien verlaufen ...

- A ... von einem Eckpunkt zur Mitte der gegenüberliegenden Seite.
- B ... von einem Eckpunkt im rechten Winkel auf die gegenüberliegende Seite.

14 Mithilfe welcher Linien kann der Mittelpunkt des kleinstmöglichen Kreises rund um ein Dreieck konstruiert werden?



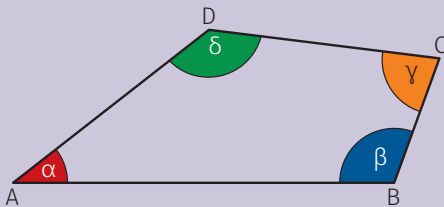
Beschriftung und Winkelsumme von Vierecken

Merke

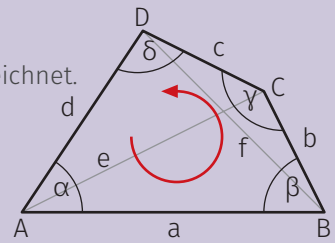
Vierecksbezeichnung

Ecken, Seiten, Winkel werden wie beim Dreieck **gegen den Uhrzeigersinn** bezeichnet. Die Verbindungsstrecke von nicht nebeneinanderliegenden Eckpunkten nennt man **Diagonale**.

In jedem Viereck ist die **Winkelsumme 360°**.

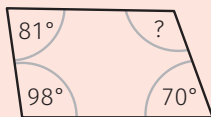


$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$
$$38^\circ + 110^\circ + 77^\circ + 135^\circ = 360^\circ$$
$$360^\circ = 360^\circ \checkmark$$



Rettungs-
beispiel

Wie groß ist der fehlende Winkel?



- Du addierst die gegebenen Winkel. Überlege auch immer, ob gegenüberliegende Winkel gleich groß sein können oder ob sich Winkel auf 180° ergänzen!
 $81^\circ + 98^\circ + 70^\circ = 249^\circ$
- Die Summe der gegebenen Winkel wird von der Summe der Innenwinkel = 360° subtrahiert. $360^\circ - 249^\circ = 111^\circ$

Lösung: Der fehlende Winkel hat 111°.

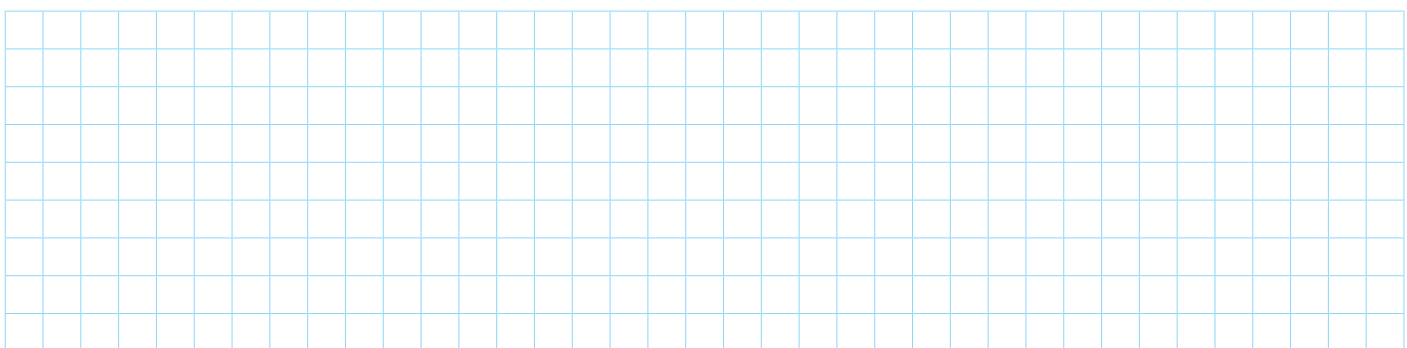
- 15 Drei Winkel eines Vierecks sind gegeben: $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 150^\circ$ $\gamma = 30^\circ$
Berechne den fehlenden Winkel im Viereck!

- 16 Berechne jeweils den fehlenden Winkel in den Vierecken!

a)	$\alpha = 37^\circ$ $\beta = 119^\circ$ $\gamma = 118^\circ$	b)	$\alpha = 34^\circ$ $\beta = 124^\circ$ $\gamma = 90^\circ$
c)	$\beta = 68^\circ$ $\gamma = 123^\circ$ $\delta = 23^\circ$	d)	$\alpha = 16^\circ$ $\gamma = 128^\circ$ $\delta = 110^\circ$

- 17 Berechne die fehlenden Winkel der abgebildeten Figuren!

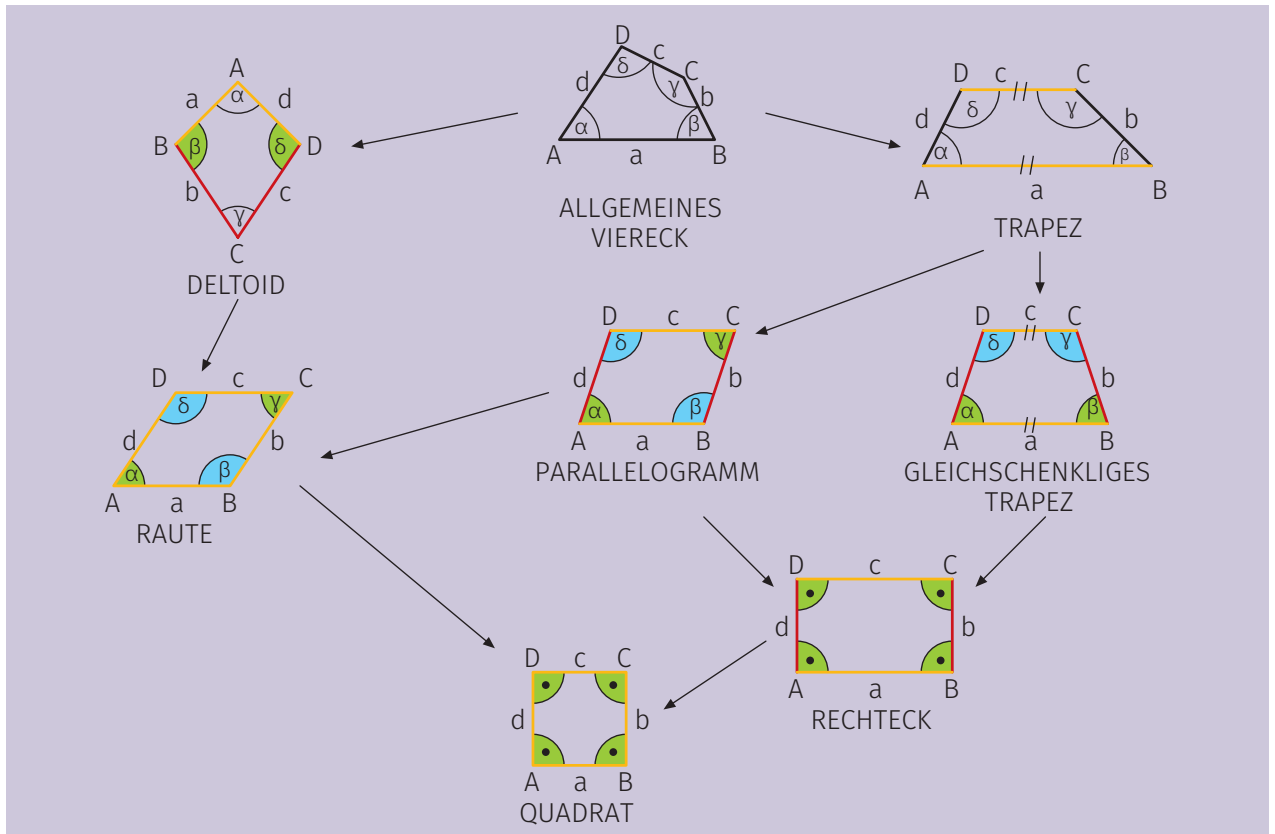
a) b) c)





Übersicht der Vierecke

Merke



18 Um welches Viereck handelt es sich jeweils?

a)	Es besitzt zwei parallele Seiten und zwei gleich lange Schenkel.
b)	Es besitzt jeweils zwei parallele, gleich lange Seiten und vier rechte Winkel.
c)	Es besitzt jeweils zwei benachbarte, gleich lange Seiten und die beiden Diagonalen stehen normal aufeinander.
d)	Das Viereck hat vier gleich lange Seiten und vier gleich große Winkel.
e)	Das Viereck besitzt zwei parallele Seiten und vier verschieden große Winkel.

19 Überprüfe, ob die Aussagen richtig oder falsch sind!

		richtig	falsch
A	Jedes Quadrat ist ein Rechteck.		
B	Ein Deltoid ist ein Parallelogramm.		
C	Jede Raute ist ein Quadrat.		
D	Ein Quadrat ist ein Trapez.		

20 Auf welche Vierecke trifft das zu?

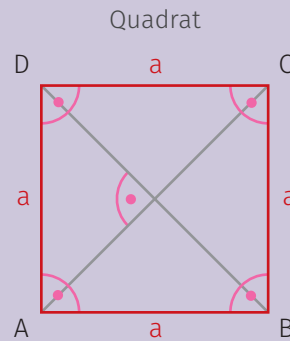
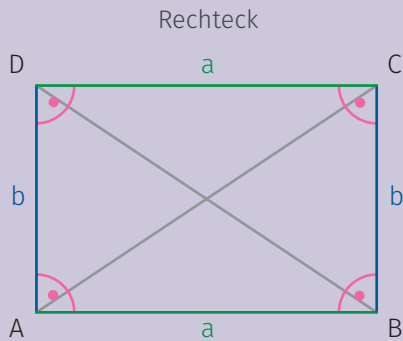
a)	Welche Vierecke haben vier gleich lange Seiten?
b)	Welche Vierecke besitzen nur eine Symmetrieachse?
c)	Bei welchen Vierecken sind die zwei Diagonalen gleich lang?
d)	In welchem Viereck sind ein Paar gegenüberliegender Winkel gleich groß und benachbarte Winkel verschieden groß?



Eigenschaften von Vierecken

Merke

Eigenschaften von Rechteck und Quadrat:

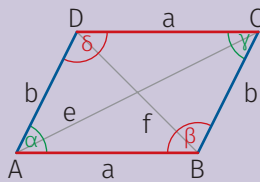


- die gegenüberliegenden Seiten sind gleich lang und parallel
- es gibt 4 rechte Winkel
- die Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander

Ein Quadrat ist ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten.

Merke

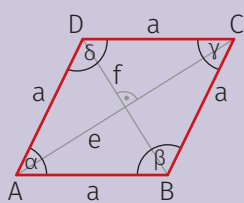
Eigenschaften eines Parallelogramms:



- je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang
- gegenüberliegende Winkel sind gleich groß
- die an einer Seite anliegenden Winkel sind supplementär
- die Diagonalen halbieren einander

Merke

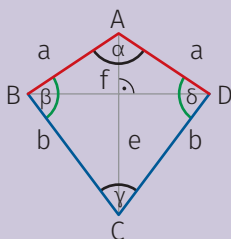
Eigenschaften einer Raute (Rhombus):



- alle vier Seiten sind gleich lang
- die gegenüberliegenden Seiten sind parallel
- die Diagonalen stehen normal aufeinander
- die Diagonalen halbieren einander
- die Diagonalen halbieren die Winkel

Merke

Eigenschaften eines Deltoids (Drachenviereck):

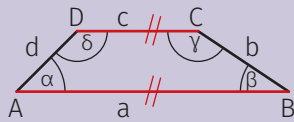


- je zwei benachbarte Seiten sind gleich lang
- die der Symmetrieachse gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß
- die Diagonalen stehen normal aufeinander
- eine Diagonale ist die Symmetrieachse und halbiert die andere
- die Symmetrieachse halbiert die anliegenden Winkel



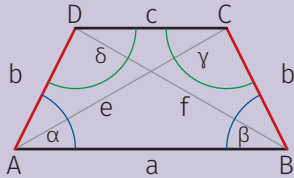
Merke

Eigenschaften eines allgemeinen Trapezes:



Ein Trapez hat zwei parallele Seiten.
 $\alpha + \delta = 180^\circ$
 $\beta + \gamma = 180^\circ$

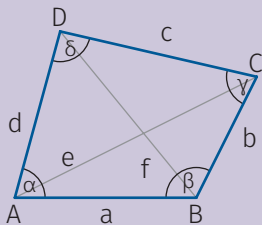
Eigenschaften eines gleichschenkligen Trapezes:



- je zwei gleich große Winkel, die an einer Paralleelseite anliegen ($\alpha = \beta, \gamma = \delta$)
- zwei gleich lange Schenkel
- eine Symmetrieachse, die normal zu den parallelen Seiten steht
- die Diagonalen sind gleich lang und schneiden einander auf der Symmetrieachse

Merke

Eigenschaften eines allgemeinen Vierecks:



Ein Viereck, das keine Regelmäßigkeiten aufweist, bezeichnet man als allgemeines Viereck oder Trapezoid.

- Allgemeine Vierecke haben:
- vier Seiten, vier Eckpunkte und vier Winkel
 - zwei Diagonalen

21 Kreuze an, was zutrifft!

	Eigenschaften	beliebiges Rechteck	Quadrat
A	Es gibt 4 rechte Winkel.		
B	Die gegenüberliegenden Seiten sind gleich lang.		
C	Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel.		
D	Die Diagonalen sind gleich lang.		
E	Alle Seiten sind gleich lang.		
F	Die Diagonalen halbieren einander.		
G	Die Diagonalen schneiden sich im rechten Winkel.		

22 Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind!

		richtig	falsch
A	Eine Diagonale teilt eine Raute in zwei kongruente Dreiecke.		
B	Eine Raute hat nur eine Symmetrieachse.		
C	Die Diagonalen der Raute stehen normal aufeinander.		
D	Eine Raute wird durch die beiden Diagonalen in vier rechtwinklige Dreiecke geteilt.		



23 Die Eigenschaften des Deltoids treffen noch auf andere Vierecke zu. **Welche Vierecke sind auch Deltoide?**

24 Zwei Vierecke haben gleiche Seitenlängen. **Sind die beiden Vierecke immer kongruent (= deckungsgleich)?**

25 **Entscheide mithilfe der Angabe, ob es sich um ein gleichschenkliges Trapez, ein Rechteck oder ein Deltoid handelt!**

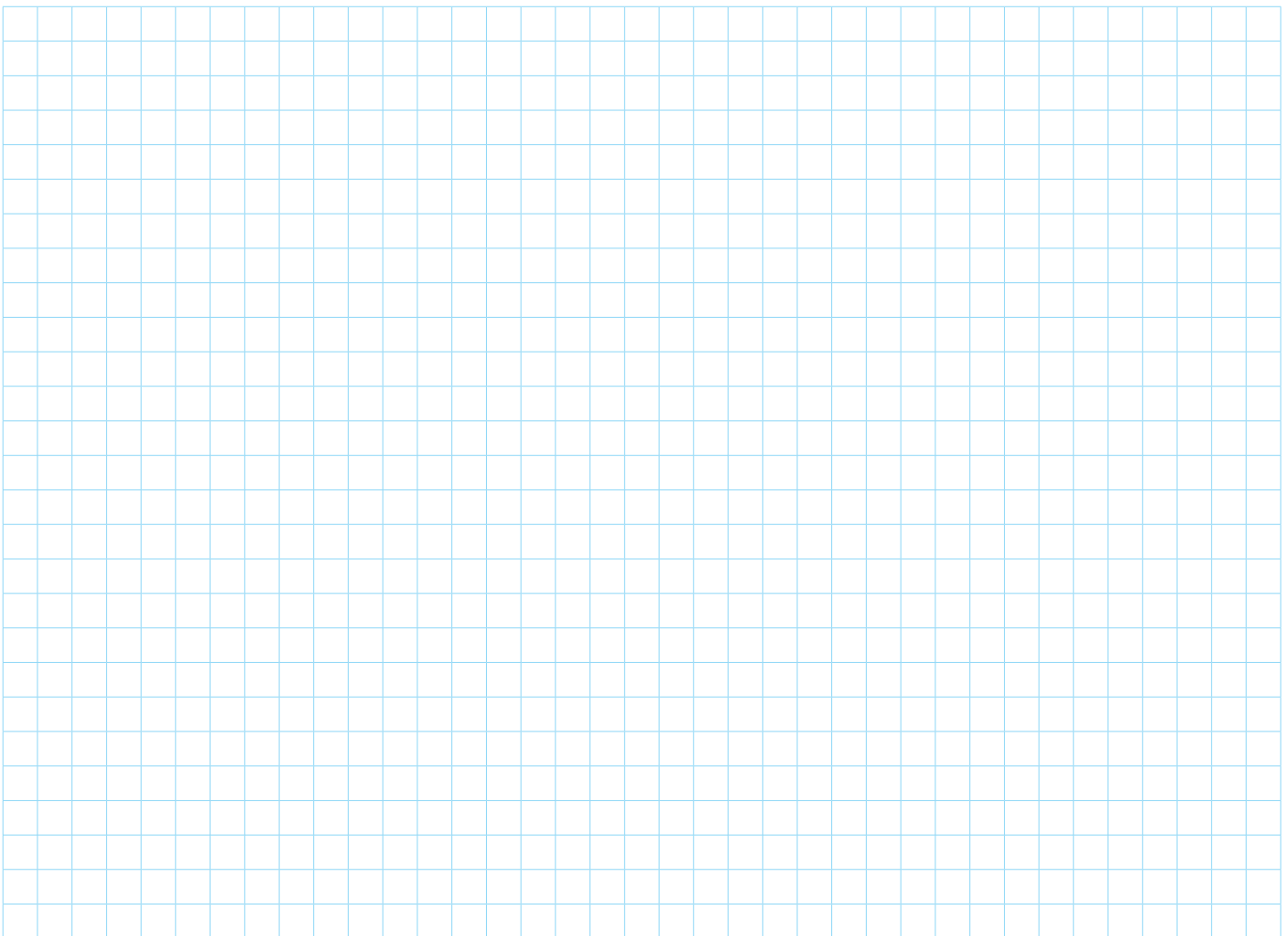
a)	$a = 3,5 \text{ cm}$	$b = d = 1,8 \text{ cm}$	$\alpha = \beta = 45^\circ$	b)	$a = d = 15 \text{ mm}$	$b = c = 31 \text{ mm}$	$e = 41 \text{ mm}$
----	----------------------	--------------------------	-----------------------------	----	-------------------------	-------------------------	---------------------

26 **Welches „Parallelogramm“ entsteht, wenn sich ...**

a)	zwei unterschiedlich breite Wege im rechten Winkel kreuzen?
b)	zwei gleich breite Wege im rechten Winkel kreuzen?
c)	zwei unterschiedlich breite Wege in einem Winkel, der kleiner als 90° ist, kreuzen?

27 **Welche Figur entsteht, wenn du ein gleichseitiges Deltoid konstruierst?**

28 **Skizziere ein Deltoid mit gleich langen Diagonalen, die einander halbieren! Was entsteht?**





Lösungen

1 A falsch B richtig C falsch D falsch

2 1 a) ungleichseitig b) rechtwinklig 2 a) gleichschenkelig b) rechtwinklig
 3 a) ungleichseitig b) stumpfwinklig 4 a) gleichseitig b) spitzwinklig

3 spitzwinkliges Dreieck: 2, 4, 8
rechtwinkliges Dreieck: 1, 5, 7
stumpfwinkliges Dreieck: 3, 6, 9

Seiten / Winkel	spitzwinklig	rechtwinklig	stumpfwinklig
gleichseitig	spitzwinkliges, gleichseitiges Dreieck		
gleichschenkelig	spitzwinkliges, gleichschenkeliges Dreieck	rechtwinkliges, gleichschenkeliges Dreieck	stumpfwinkliges, gleichschenkeliges Dreieck
ungleichseitig	spitzwinkliges, ungleichseitiges Dreieck	rechtwinkliges, ungleichseitiges Dreieck	stumpfwinkliges, ungleichseitiges Dreieck

5 a) $\alpha = 71^\circ$ b) $\gamma = 26^\circ$ c) $\gamma = 52^\circ$

6 $\beta = 27^\circ$

7 a) SWS-Satz b) WSW-Satz c) SSS-Satz d) SSW-Satz

8 a) a, α, β oder γ b) c c) c, β oder b d) c, a oder γ

9 a) nein b) ja c) nein d) ja

10 a) ja b) nein c) ja d) nein

11 Inkreismittelpunkt

12 A richtig B falsch C richtig

13 A

14 Seitensymmetralen

15 $\delta = 150^\circ$

16 a) $\delta = 86^\circ$ b) $\delta = 112^\circ$ c) $\alpha = 146^\circ$ d) $\beta = 106^\circ$



- 17 a) $\gamma = 109^\circ$ b) $\beta = \delta = 107^\circ, \gamma = 73^\circ$ c) $\beta = \delta = 47^\circ, \alpha = \gamma = 133^\circ$
- 18 a) gleichschenkliges Trapez b) Rechteck c) Deltoid
 d) Quadrat e) allgemeines Trapez
- 19 A richtig B falsch C falsch D richtig
- 20 a) Quadrat, Raute b) Deltoid, gleichschenkliges Trapez
 c) Rechteck, Quadrat, gleichschenkliges Trapez d) Deltoid
- 21 A R, Q B R, Q C R, Q D R, Q E Q F R, Q G Q
- 22 A richtig B falsch C richtig D richtig
- 23 Raute und Quadrat
- 24 Nein, die beiden Vierecke sind nur kongruent, wenn Seitenlängen und Winkel übereinstimmen.
- 25 a) gleichschenkliges Trapez b) Deltoid
- 26 a) Rechteck b) Quadrat c) Parallelogramm
- 27 Raute
- 28 Quadrat