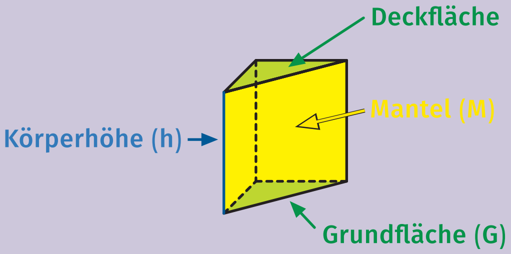
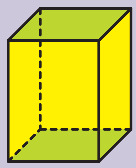
Eigenschaften von Prismen

Merke

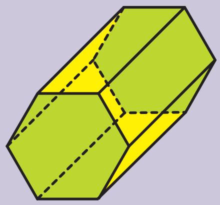
Ein gerades Prisma hat immer eine **Grund-** und eine **Deckfläche**, die deckungsgleich (kongruent) und parallel zueinander sind.
Den Abstand zwischen Grund- und Deckfläche nennt man **Körperhöhe**.
Der **Mantel** setzt sich immer aus Rechtecken zusammen.



dreiseitiges Prisma



vierseitiges Prisma
= Quader



regelmäßiges
sechsseitiges Prisma

Ein Prisma wird nach der **Anzahl der Seiten** seiner Grundfläche (G) benannt.
Ist die Grundfläche eines Prismas eine regelmäßige Figur (z. B. gleichseitiges Dreieck, Quadrat usw.), so nennt man es auch **regelmäßiges Prisma**.

Ein **Quader** ist ein **vierseitiges Prisma** mit 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen.
Ein **Würfel** ist ein **besonderer Quader** mit 8 Ecken, 12 gleich langen Kanten und 6 kongruenten quadratischen Flächen.

1 **Welche Behauptung stimmt?**

A ☐ „Jeder Würfel ist ein Quader."	B ☐ „Jeder Quader ist ein Würfel."

2 **Wie viele Ecken hat**

a)	ein dreiseitiges Prisma?	b)	ein vierseitiges Prisma?
c)	ein sechsseitiges Prisma?	d)	ein achtseitiges Prisma?

3 **Wie viele Kanten hat**

a)	ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma?	b)	ein fünfseitiges Prisma?
c)	ein regelmäßiges achtseitiges Prisma?	d)	ein zehnseitiges Prisma?

4 **Wie viele Begrenzungsflächen hat**

a)	ein dreiseitiges Prisma?	b)	ein Prisma mit quadratischer Grundfläche?
c)	ein sechsseitiges Prisma?	d)	ein zwölfseitiges Prisma?

5 **Wie muss die Grundfläche des regelmäßigen Prismas jeweils aussehen, damit die angegebenen Eigenschaften zutreffen? Gib auch die Namen der gesuchten Körper an!**

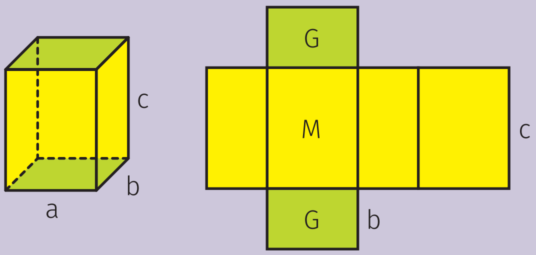
a)	Das Prisma hat 8 Ecken.
b)	Das regelmäßige Prisma hat 9 Kanten.
c)	Der Mantel des Prismas setzt sich aus 6 Rechtecken zusammen.
d)	Das regelmäßige Prisma hat 10 Ecken und 7 Begrenzungsflächen.

Netz und Oberflächeninhalt von Prismen

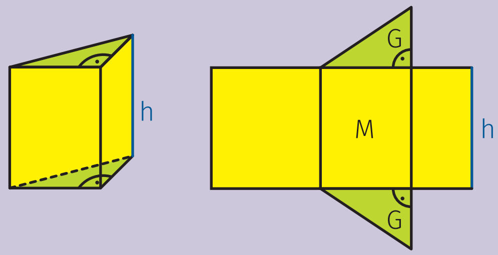
Merke

Die **Oberfläche (O)** eines Prismas setzt sich immer aus der **Grundfläche** (**G**), der **Deckfläche** und dem **Mantel** (**M**) zusammen.

Quader (vierseitiges Prisma)

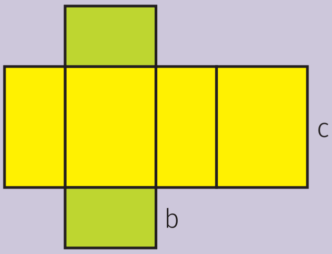


dreiseitiges Prisma



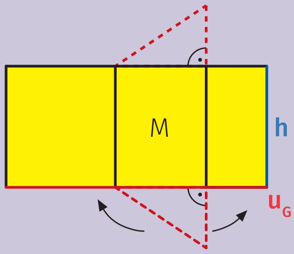
Für alle Prismen gilt: $\boxed{O = 2 \cdot G + M}$

Eine bereits bekannte Oberflächenformel für Quader:



$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

Bei geraden Prismen hat der Mantel (M) immer die Form eines Rechtecks:



u_G ... Umfang der Grundfläche

$M = u_G \cdot h$

Rettungsbeispiel

Ein Quader hat eine Länge a = 7,5 cm, eine Breite b = 3 cm und eine Höhe h = 9 cm.
Berechne den Oberflächeninhalt des Quaders!

a = 7,5 cm
b = 3 cm
h = 9 cm
O = ?

Formel 1	Formel 2
$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$	$O = 2 \cdot G + u_G \cdot h$ $O = 2 \cdot a \cdot b + (2a + 2b) \cdot h$
$O = 2 \cdot 7{,}5 \cdot 3 + 2 \cdot 7{,}5 \cdot 9 + 2 \cdot 3 \cdot 9$ $O = 45 + 135 + 54$ **$O = 234\ cm^2$**	$O = 2 \cdot 7{,}5 \cdot 3 + (2 \cdot 7{,}5 + 2 \cdot 3) \cdot 9$ $O = 45 + 21 \cdot 9$ $O = 45 + 189$ **$O = 234\ cm^2$**

Lösung: Der Oberflächeninhalt des Quaders beträgt 234 cm².

Rettungsbeispiel

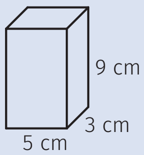
Ein Würfel hat eine Kantenlänge a = 7,5 cm.
Berechne den Oberflächeninhalt des Würfels!

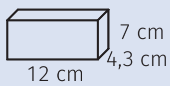
a = 7,5 cm
O = ?

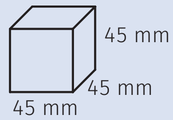
$O = 6 \cdot a \cdot a$
$O = 6 \cdot 7{,}5 \cdot 7{,}5$
$O = 6 \cdot 56{,}25$
$\mathbf{O = 337{,}5\ cm^2}$

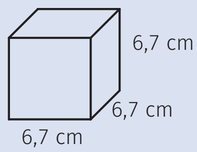
Lösung: Der Oberflächeninhalt des Würfels beträgt 337,5 cm².

6 **Berechne den Oberflächeninhalt der abgebildeten Körper!**

a)


b)


c)


d)


Rettungsbeispiel

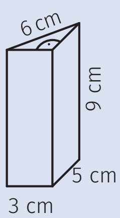
Ein Prisma mit rechtwinkligem Dreieck als Grundfläche hat die Längen a = 7,5 cm, b = 3 cm, c = 8 cm und eine Höhe h = 9 cm. (Bei den Zahlenangaben handelt es sich um gerundete Werte.)
Berechne den Oberflächeninhalt des dreiseitigen Prismas!

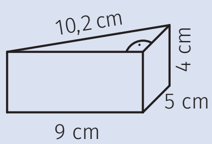
a = 7,5 cm
b = 3 cm
c = 8 cm
h = 9 cm
O = ?

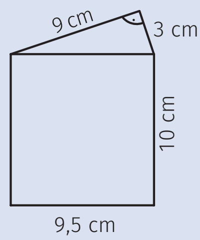
Formel 1	Formel 2
$O = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h$	$O = 2 \cdot G + u_G \cdot h$
$O = 2 \cdot \frac{7{,}5 \cdot 3}{2} + 7{,}5 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 8 \cdot 9$	$O = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (a + b + c) \cdot h$
$O = 22{,}5 + 67{,}5 + 27 + 72$	$O = 2 \cdot \frac{7{,}5 \cdot 3}{2} + (7{,}5 + 3 + 8) \cdot 9$
$\mathbf{O = 189\ cm^2}$	$O = 22{,}5 + 18{,}5 \cdot 9$
	$O = 22{,}5 + 166{,}5$
	$\mathbf{O = 189\ cm^2}$

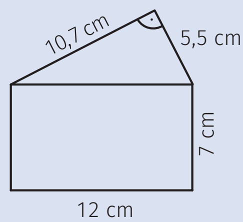
Lösung: Der Oberflächeninhalt des dreiseitigen Prismas beträgt 189 cm².

7 **Berechne den Oberflächeninhalt der Körper, die jeweils ein rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche haben!** (Bei den Zahlenangaben handelt es sich um gerundete Werte.)

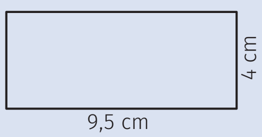
a)


b)


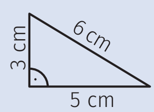
c)


d)


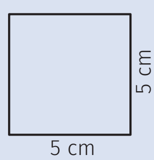
8 Gegeben sind die Grundflächen und die Höhen der Prismen. **Berechne deren Oberflächeninhalt!**
(Bei den Zahlenangaben handelt es sich um gerundete Werte.)

a)


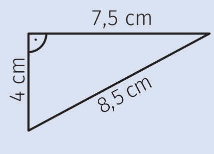
h = 2,5 cm

b)


h = 18 cm

c)


h = 15 cm

d)


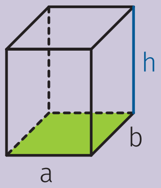
h = 32 cm

Volumen von Prismen

Merke

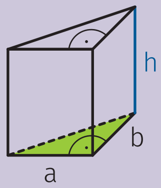
Das **Volumen** ist der **Rauminhalt** eines Gegenstandes.
Um das Volumen (V) eines Prismas zu erhalten, multipliziert man den Inhalt der **Grundfläche** (**G**) mit der **Körperhöhe** (**h**).

Prisma mit einem **Rechteck als Grundfläche** = QUADER



Durch einen Diagonalschnitt entstehen zwei gleich große, dreiseitige Prismen

Prisma mit einem **rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche**



Für alle Prismen gilt: $\boxed{V = G \cdot h}$

$V = a \cdot b \cdot h$

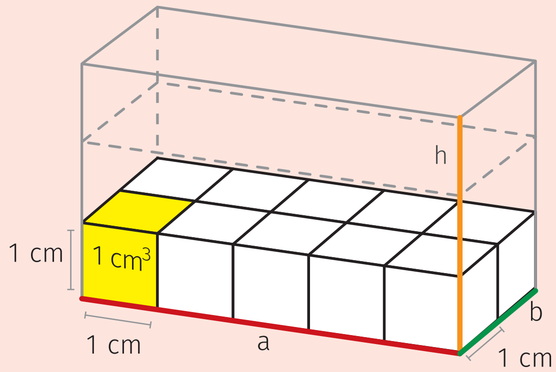
$V = \frac{a \cdot b}{2} \cdot h$

Rettungs-beispiel

Ein Quader hat eine Länge a = 5 cm, eine Breite b = 2 cm und eine Höhe h = 3 cm.
Berechne das Volumen des Quaders!

Quader
Volumen = Länge · Breite · Höhe
V = a · b · h

V = 5 cm³ · 2 · 3
V = 30 cm³



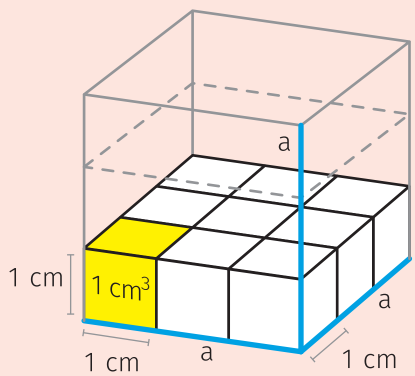
Lösung: Das Volumen des Quaders beträgt 30 cm³.

Rettungs-beispiel

Ein Würfel hat die Seite a = 3 cm.
Berechne das Volumen des Würfels!

Würfel
Volumen = Länge · Breite · Höhe
V = a · a · a

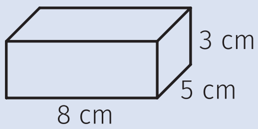
V = 3 cm³ · 3 · 3
V = 27 cm³



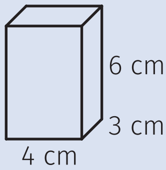
Lösung: Das Volumen des Würfels beträgt 27 cm³.

9 **Berechne das Volumen der abgebildeten Prismen!**

a)

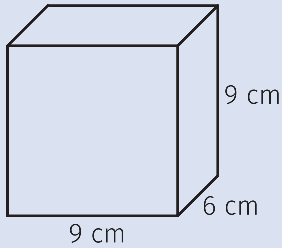


b)



c)

d)



Rettungsbeispiel

Ein Prisma mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche hat eine Länge a = 5 cm, eine Breite b = 2 cm und eine Höhe h = 3 cm.
Berechne das Volumen des dreiseitigen Prismas!

a = 5 cm
b = 2 cm
h = 3 cm
V = ?

$V = G \cdot h$

$V = \frac{a \cdot b}{2} \cdot h$

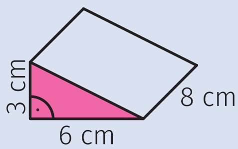
$V = \frac{5 \cdot 2}{2} \cdot 3$

$\mathbf{V = 15\ cm^3}$

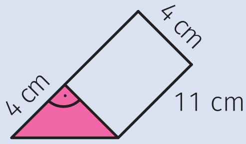
Lösung: Das Volumen des dreiseitigen Prismas beträgt 15 cm^3.

10 **Berechne jeweils das Volumen der Prismen mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche!**

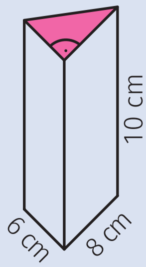
a)



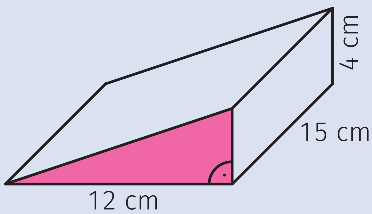
b)



c)



d)



11 Ein Heizöltank hat die Form eines Quaders mit 4,5 m Länge, 2 m Breite und 1,5 m Höhe.

a)	**Wie viel Liter Öl haben in dem Tank Platz?**
b)	**Wie viele Stunden wird es dauern, bis der Tank gefüllt ist, wenn pro Minute 90 Liter Öl in den Tank fließen?**

Umkehrung der Volumsformel von Prismen

Merke

Durch Umkehren der Volumsformel **V = G · h** ist es möglich, die Größe der Grundfläche oder die Körperhöhe eines Prismas zu berechnen. Voraussetzung dafür ist, dass jeweils die beiden anderen Größen bekannt sind.

$\boxed{G = \frac{V}{h} \text{ oder } G = V : h}$ $\boxed{h = \frac{V}{G} \text{ oder } h = V : G}$

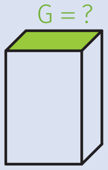
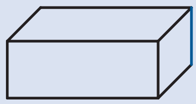
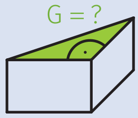
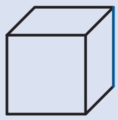
Rettungsbeispiel

Ein Prisma mit einer rechteckigen Grundfläche von 320 cm² hat ein Volumen von 2880 cm³.
Berechne die Höhe des Prismas!

V = 2880 cm³ h = V : G
G = 320 cm² h = 2880 : 320
h =? **h = 9 cm**

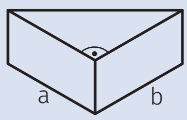
Lösung: Die Höhe des Prismas beträgt 9 cm.

12 **Berechne die gesuchten Werte!**

Körper	a)	b)	c)	d)
				
G		24 cm²		60 cm²
h	9 cm		7 cm	
V	144 cm³	120 cm³	105 cm³	900 cm³

13 **Berechne die fehlenden Größen der dreiseitigen Prismen!**

a)	a = 6 cm	b = 5 cm	h = 3 cm	G = ? V = ?
b)	b = 4 cm	G = 6 cm²	V = 30 cm³	a = ? h = ?
c)	a = 8 cm	h = 2,5 cm	G = 20 cm²	b = ? V = ?
d)	a = 4,5 cm	b = 4 cm	V = 54 cm³	h = ? G = ?



14 Ein Zimmer mit einer Breite von 4 m, einer Länge von 5 m und einer Höhe von 4 m wird umgebaut. Die Decke des Zimmers soll so gesenkt werden, dass sich das Volumen um 30 m³ verkleinert.
Wie viele Meter muss die Decke gesenkt werden?

A ☐ 1 m	B ☐ 3 m	C ☐ 1,5 m	D ☐ 2,5 m	E ☐ 2 m

Lösungen

1	A							
2	a)	6 Ecken	b)	8 Ecken	c)	12 Ecken	d)	16 Ecken
3	a)	9 Kanten	b)	15 Kanten	c)	24 Kanten	d)	30 Kanten
4	a)	5 Flächen	b)	6 Flächen	c)	8 Flächen	d)	14 Flächen
5	a)	Viereck – Quader oder Würfel			b)	gleichseitiges Dreieck – dreiseitiges Prisma		
	c)	Sechseck – sechsseitiges Prisma			d)	regelmäßiges Fünfeck – fünfseitiges Prisma		
6	a)	$O = 174\ cm^2$	b)	$O = 331{,}4\ cm^2$	c)	$O = 121{,}5\ cm^2$	d)	$O = 269{,}34\ cm^2$
7	a)	$O = 141\ cm^2$	b)	$O = 141{,}8\ cm^2$	c)	$O = 242\ cm^2$	d)	$O = 256{,}25\ cm^2$
8	a)	$O = 143{,}5\ cm^2$	b)	$O = 267\ cm^2$	c)	$O = 350\ cm^2$	d)	$O = 670\ cm^2$
9	a)	$V = 120\ cm^3$	b)	$V = 72\ cm^3$	c)	$V = 120\ cm^3$	d)	$V = 486\ cm^3$
10	a)	$V = 72\ cm^3$	b)	$V = 88\ cm^3$	c)	$V = 240\ cm^3$	d)	$V = 360\ cm^3$
11	a)	13 500 l			b)	2,5 Stunden		
12	a)	$G = 16\ cm^2$	b)	$h = 5\ cm$	c)	$G = 15\ cm^2$	d)	$h = 15\ cm$
13	a)	$G = 15\ cm^2$; $V = 45\ cm^3$			b)	$a = 3\ cm$; $h = 5\ cm$		
	c)	$b = 5\ cm$; $V = 50\ cm^3$			d)	$G = 9\ cm^2$; $h = 6\ cm$		
14	C							