westermann
Immer auf den Punkt

Dynamische Investitionsrechenverfahren

Wolf-Dieter Rückwart

1 Einführung

Investitionsentscheidungen sind immer mit Auszahlungen verbunden. Investitionsentscheidungen gehören somit zu den folgenschwersten wirtschaftlichen Entscheidungen, die ein Unternehmer treffen kann: Im günstigen Fall wirft die Investition Überschüsse ab, im ungünstigen Fall treten Verluste ein. Jedem Unternehmer ist also dringend zu raten, sich bei Investitionen nicht nur auf seine Intuition und Marktkenntnis zu verlassen, sondern sich vor jeder Investition zusätzlich über deren finanzielle Folgen zu vergewissern. Hierzu stehen ihm u. a. folgende mathematische Methoden zur Verfügung, die zwar alle auf zukunftsorientierter – und damit unsicherer - Basis beruhen, aber dennoch eine Entscheidungsgrundlage bilden:

Investitionsrechenverfahren

Statische Verfahren gehen von einem einzigen Durchschnittsjahr aus und lassen mögliche Änderungen in den betrachteten Größen außer Acht.	**Dynamische Verfahren** berücksichtigen die Veränderungen der Ein- und Auszahlungen über die gesamte Laufzeit der Investition.
Kostenvergleichsrechnung	Kapitalwertmethode
Gewinnvergleichsrechnung	Interne Zinssatzmethode
Rentabilitätsvergleichsrechnung	Annuitätenmethode
Amortisationsvergleichsrechnung	Dynamische Amortisationsmethode

Die hier vorliegende Ausarbeitung befasst sich mit den dynamischen Investitionsrechenverfahren, eingegrenzt auf die **Kapitalwertmethode** sowie die **Interne Zinssatzmethode**. Die statischen Investitionsrechenverfahren sind in den WESTERMANN-Büchern „Industrielles Rechnungswesen – IKR“ „Industriebuchführung mit Kosten- und Leistungsrechnung“ und „Rechnungswesen für Industriekaufleute“ dargestellt.

2 Kapitalwertmethode

Die Anwendung der Kapitalwertmethode setzt die Kenntnis über folgende Größen voraus:

- Höhe der geplanten Investitionsauszahlung (Anschaffungsauszahlung).
- Geplante jährliche Einzahlungen und Auszahlungen über die gesamte Laufzeit, die sich aus den Planbilanzen zu den Abschlussstichtagen ablesen lassen.
- Kalkulationszinssatz, der sich an den langfristigen Kreditzinssatz der Banken anlehnt.
- Mathematische Kenntnisse zur Zinseszinsrechnung.

Beispiel 1:
Igor Karmann will ein Taxigewerbe gründen. Er hat die erforderlichen Anmeldungen vollzogen und Nachweise erbracht. Mit eigenen Finanzmitteln will er einen Pkw per 01.01.01 zum Preis von 45.000,00 € erwerben. Der Pkw hat eine Laufzweit von 6 Jahren. Für diese Investition rechnet er in den nächsten Jahren mit Einzahlungen aus der Personenbeförderung (Umsatzerlöse) und mit Auszahlungen für Versicherungen, Steuern, Wartung, Reparaturen und Kraftstoffen. Im 4. Jahr rechnet Herr Karmann mit einer deutlichen Steigerung der Einzahlungen und Auszahlungen, da in der Stadt eine große Messe veranstaltet wird.
Herr Karmann will mit Hilfe der Kapitalwertmethode prüfen, ob sich seine geplante Investition lohnt; er legt seinen Berechnungen einen Kalkulationszinssatz von 5 %/Jahr zugrunde.

Der Kaufpreis als einmalige Anschaffungsauszahlung (Investition) zum Jahresbeginn 01 beträgt 45.000,00 €. In der folgenden Übersicht sind die jährlichen Einzahlungen und die jährlichen Auszahlungen jeweils zum 31.12. verzeichnet; aus der Differenz der periodisierten Einnahmen und Ausgaben ergeben sich die jährlichen Periodenüberschüsse:

	31.12.01	31.12.02	31.1203	31.12.04	31.12.05	31.12.06
Einzahlungen	12.000,00	14.500,00	16.000,00	25.500,00	14.500,00	16.200,00
Auszahlungen	5.500,00	6.500,00	7.000,00	11.500,00	6.500,00	7.200,00
Perioden-überschüsse	6.500,00	8.000,00	9.000,00	14.000,00	8.000,00	9.000,00

Ob sich die Investition lohnen wird, weiß Herr Karmann erst, wenn er die zu unterschiedlichen Zeitpunkten in unterschiedlicher Höhe anfallenden Periodenüberschüsse mit der einmaligen Anschaffungsauszahlung von 45.000,00 € zu Jahresbeginn 01 **vergleichbar** macht. Dies geschieht, indem die zu unterschiedlichen Abschlussstichtagen eintretenden Periodenüberschüsse auf den **Jahresanfang 01.01.01 abgezinst** werden **(Barwert)**; denn die in der Zukunft liegenden Periodenüberschüsse haben zum Zeitpunkt 01.01.01 einen geringeren „Wert“ als zu ihren aktuellen Zeitpunkten. Für die Abzinsung benötigt Herr Karmann einen **Kalkulationszinssatz**, den er in Anlehnung an die derzeit üblichen Kreditzinssätze der Banken mit **5 %/Jahr** festlegt.

Aufgabe der Berechnung ist es nun, den **Kapitalwert** (**KW**) zu bestimmen, wobei gilt:

- **Kapitalwert** (**KW**) ist die **Differenz** zwischen der abgezinsten Summe der (jährlichen) **Periodenüberschüsse** (P_i) im Zeitpunkt t_0 (Barwert) und der **Anschaffungsauszahlung**.
- **KW < 0** → Die Investition lohnt sich nicht. Die abgezinsten Periodenüberschüsse zum Zeitpunkt t_0 reichen nicht aus, um die Anschaffungsauszahlung zu decken.

- **KW = 0** → Die abgezinsten Periodenüberschüsse reichen gerade aus, um die Anschaffungsauszahlung zu ersetzen.
- **KW > 0** → Die Investition lohnt sich. Die abgezinsten Periodenüberschüsse zum Zeitpunkt t_0 sind größer als die Anschaffungsauszahlung.

(1) Die Berechnung des Barwertes aller Periodenüberschüsse ist mit Hilfe der **Zinseszinsrechnung**[1] möglich; hierbei wird jeder Periodenüberschuss P_i auf t_0 abgezinst:

(2) Die Grundformel der Aufzinsung auf ein Endkapital K_n lautet: $\mathbf{K_n = K_0 \cdot q^n}$. Hieraus lässt sich die **Abzinsung** auf $\mathbf{K_0}$ ableiten:

$$K_0 = K_n : q^n \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{K_0 = K_n \cdot 1/q^n} \quad \text{mit } q = (1 + p/100)$$

Die Abzinsung der Periodenüberschüsse soll mit folgender Darstellung verdeutlicht werden:

	t_0 01.01.01	t_1 31.12.01	t_2 31.12.02	t_3 31.12.03	t_4 31.12.04	t_5 31.12.05	t_6 31.12.06
Anschaffungs-auszahlung (A_0)	**45.0000,00**	0	0	0	0	0	0
Perioden-Überschüsse (P_i)		6.500	8. 000	9.000	14.000	8.000	9.000
Auf den Zeitpunkt t_0 abgezinste Perioden-überschüsse	6.190,47						
	7.256,24						
	7.774,54						
	11.517,84						
	6.268,21						
	6.715,94						
Barwert der (abgezinsten) Periodenüberschüsse	**45.723,24**						
Kapitalwert (KW)	**723,24**						

Rechen-schritte	**Zinseszinsrechnung** (siehe oben)	**Perioden-überschüsse**
1.	P_1 = 6.500,00 € entspricht K_1, gesucht ist $P_0 = (K_0)$ = 6.500,00 € **:** $1{,}05^1$ =	6.190,47 €
2.	P_2 = 8.000,00 € entspricht K_2, gesucht ist $P_0 = (K_0)$ = 8.000,00 € **:** $1{,}05^2$ = 8.000 **:** 1,1025 =	7.256,24 €
3.	P_3 = 9.000,00 € entspricht K_3, gesucht ist $P_0 = (K_0)$ = 9.000,00 € **:** $1{,}05^3$ = 9.000 **:** 1,157625 =	7.774,54 €
4.	P_4 = 14.000,00 € entspricht K_4, gesucht ist $P_0 = (K_0)$ = 14.000,00 € **:** $1{,}05^4$ = 14.000 **:** 1,2155062 =	11.517,84 €
5.	P_5 = 8.000,00 € entspricht K_5, gesucht ist $P_0 = (K_0)$ = 8.000,00 € **:** $1{,}05^5$ = 8.000 **:** 1,2762816 =	6.268,21 €
6.	P_6 = 9.000,00 € entspricht K_6, gesucht ist $P_0 = (K_0)$ = 9.000,00 € **:** $1{,}05^6$ = 9.000 **:** 1,3400956 =	6.715,95 €
	Summe der jährlichen Periodenüberschüsse	**45.723,24 €**
	- Anschaffungsauszahlung	45.000,00 €
	= Kapitalwert	**723,24 €**

Der Kapitalwert ist **positiv**; also lohnt sich die Investition zu den o. g. Bedingungen.

---

[1] siehe hierzu den Aufsatz „Zinseszinsrechnung mit grafischen Darstellungen“ unter www.westermann.de/landing/schmolke-deitermann

Merke:

- Die unterschiedlichen Zeitpunkte der Einzahlung und der Auszahlungen werden als „**t**“ mit einem Index bezeichnet: Der Zeitpunkt der Anschaffungsauszahlung erhält die Bezeichnung „$\mathbf{t_0}$“; dementsprechend werden die Zeitpunkte der nachfolgenden Einzahlungen und Auszahlungen mit „$\mathbf{t_1}$“ bis „$\mathbf{t_6}$“ gekennzeichnet (allgemein: t_i).
- Die auf den Zeitpunkt t_0 abgezinsten Periodenüberschüsse P_i werden als **Barwert** (BW) bezeichnet (P_i = periodisierte Einzahlungen minus periodisierte Auszahlungen).

Beispiel 2:

Herr Karmann rechnet damit, dass zwar die jährlichen Auszahlungen wie in Beispiel 1 verursacht werden, aber wegen der Gewerbeeröffnung und der damit verbundenen Anlaufschwierigkeiten werden im ersten Jahr nur begrenzte Einzahlungen erzielbar sein.

	31.12.01	31.12.02	31.1203	31.12.04	31.12.05	31.12.06
Einzahlungen	8.000,00	14.500,00	16.000,00	25.500,00	14.500,00	16.200,00
Auszahlungen	5.500,00	6.500,00	7.000,00	11.500,00	6.500,00	7.200,00
Perioden-überschüsse	2.500,00	8.000,00	9.000,00	14.000,00	8.000,00	9.000,00

Rechen-schritte	**Zinseszinsrechnung** (siehe oben)	**Perioden-überschüsse**
1.	P_1 = 2.500,00 € entspricht K_1, gesucht ist P_0 = (K_0) = 2.500,00 € **:** $1{,}05^1$ =	2.380,95 €
2.	P_2 = 8.000,00 € entspricht K_2, gesucht ist P_0 = (K_0) = 8.000,00 € **:** $1{,}05^2$ = 8.000 **:** 1,1025 =	7.256,24 €
3.	P_3 = 9.000,00 € entspricht K_3, gesucht ist P_0 = (K_0) = 9.000,00 € **:** $1{,}05^3$ = 9.000 **:** 1,157625 =	7.774,54 €
4.	P_4 = 14.000,00 € entspricht K_4, gesucht ist P_0 = (K_0) = 14.000,00 € **:** $1{,}05^4$ = 14.000 **:** 1,2155062 =	11.517,84 €
5.	P_5 = 8.000,00 € entspricht K_5, gesucht ist P_0 = (K_0) = 8.000,00 € **:** $1{,}05^5$ = 8.000 **:** 1,2762816 =	6.268,21 €
6.	P_6 = 9.000,00 € entspricht K_6, gesucht ist P_0 = (K_0) = 9.000,00 € **:** $1{,}05^6$ = 9.000 **:** 1,3400956 =	6.715,95 €
	Summe der jährlichen Periodenüberschüsse	**41.913,73 €**
	- Anschaffungsauszahlung	45.000,00 €
	= **Kapitalwert (KW)**	**- 3.086,27 €**
Der Kapitalwert ist **negativ**; also lohnt sich die Investition zu den o. g. Bedingungen nicht.		

Die in den obigen Aufstellungen enthaltene mathematischen Aussage lässt sich wie folgt verallgemeinern:

$$\mathbf{KW = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot 1/q^i \quad - \quad A_0}$$

Die Gleichung enthält folgende Variable:

KW	=	Kapitalwert
n	=	Anzahl der Perioden
i	=	Bezeichnung für eine Periode zwischen 0 und n
$\sum$	=	Symbol für die Summenbildung
P_i	=	Periodenüberschuss eines beliebigen Jahres zwischen 1 und n
$1/q^i$	=	Abzinsungsfaktor eines beliebigen Jahres zwischen 1 und n, mit q = (1 + p/100), wobei p/100 den Zinssatz/Jahr darstellt
A_0	=	Anschaffungsauszahlung

Merke:
Die Gleichung besagt, dass sich der Kapitalwert einer Investition ergibt, wenn die Summe aller auf den Zeitpunkt t_0 abgezinsten Periodenüberschüsse (Barwert) um die Anschaffungsauszahlung vermindert wird.

Beispiel 3:
Ob in einem konkreten Fall der Kapitalwert positiv oder negativ ausfällt, hängt stark vom verwendeten **Zinssatz** ab. Unter den im Beispiel 1 genannten Bedingungen sollen die Kapitalwerte zusätzlich zu 5 %/Jahr für die Kalkulationszinssätze 2 %, 4 % und 6 % je Jahr durchgerechnet werden.

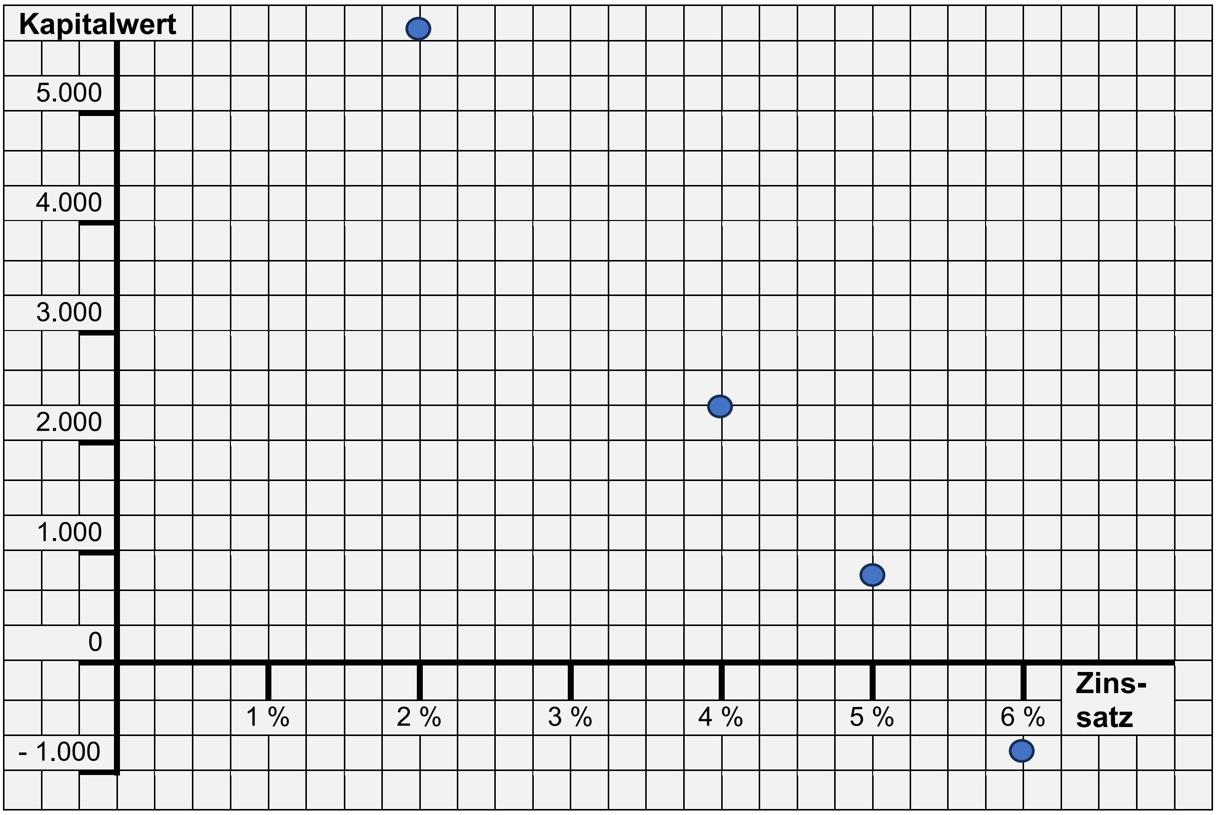
Rechen-schritte	Kalkulationszinssatz 2 %/Jahr	Perioden-überschüsse
1.	P_1 = 6.500,00 € entspricht K_1, gesucht ist P_0 = (K_0) = 6.500,00 € **:** $1{,}02^1$ =	6.372,55 €
2.	P_2 = 8.000,00 € entspricht K_2, gesucht ist P_0 = (K_0) = 8.000,00 € **:** $1{,}02^2$ =	7.689,35 €
3.	P_3 = 9.000,00 € entspricht K_3, gesucht ist P_0 = (K_0) = 9.000,00 € **:** $1{,}02^3$ =	8.480,90 €
4.	P_4 = 14.000,00 € entspricht K_4, gesucht ist P_0 = (K_0) = 14.000,00 € **:** $1{,}02^4$ =	12.933,84 €
5.	P_5 = 8.000,00 € entspricht K_5, gesucht ist P_0 = (K_0) = 8.000,00 € **:** $1{,}02^5$ =	7.245,85 €
6.	P_6 = 9.000,00 € entspricht K_6, gesucht ist P_0 = (K_0) = 9.000,00 € **:** $1{,}02^6$ =	7.991,74 €
	Summe der jährlichen Periodenüberschüsse	**50.714,23 €**
	- Anschaffungsauszahlung	45.000,00 €
	= Kapitalwert	**5.714,23 €**

Rechen-schritte	Kalkulationszinssatz 4 %/Jahr	Perioden-überschüsse
1.	P_1 = 6.500,00 € entspricht K_1, gesucht ist P_0 = (K_0) = 6.500,00 € **:** $1{,}04^1$ =	6.250,00 €
2.	P_2 = 8.000,00 € entspricht K_2, gesucht ist P_0 = (K_0) = 8.000,00 € **:** $1{,}04^2$ =	7.396,45 €
3.	P_3 = 9.000,00 € entspricht K_3, gesucht ist P_0 = (K_0) = 9.000,00 € **:** $1{,}04^3$ =	8.000,97 €
4.	P_4 = 14.000,00 € entspricht K_4, gesucht ist P_0 = (K_0) = 14.000,00 € **:** $1{,}04^4$ =	11.967,26 €
5.	P_5 = 8.000,00 € entspricht K_5, gesucht ist P_0 = (K_0) = 8.000,00 € **:** $1{,}04^5$ =	6.575,42 €
6.	P_6 = 9.000,00 € entspricht K_6, gesucht ist P_0 = (K_0) = 9.000,00 € **:** $1{,}04^6$ =	7.112,83 €
	Summe der jährlichen Periodenüberschüsse	**47.302,93 €**
	- Anschaffungsauszahlung	45.000,00 €
	= Kapitalwert	**2.302,93 €**

Rechen-schritte	Kalkulationszinssatz 6 %/Jahr	Perioden-überschüsse
1.	P_1 = 6.500,00 € entspricht K_1, gesucht ist P_0 = (K_0) = 6.500,00 € **:** $1{,}06^1$ =	6.132,08 €
2.	P_2 = 8.000,00 € entspricht K_2, gesucht ist P_0 = (K_0) = 8.000,00 € **:** $1{,}06^2$ =	7.119,97 €
3.	P_3 = 9.000,00 € entspricht K_3, gesucht ist P_0 = (K_0) = 9.000,00 € **:** $1{,}06^3$ =	7.556,57 €
4.	P_4 = 14.000,00 € entspricht K_4, gesucht ist P_0 = (K_0) = 14.000,00 € **:** $1{,}06^4$ =	11.089,31 €
5.	P_5 = 8.000,00 € entspricht K_5, gesucht ist P_0 = (K_0) = 8.000,00 € **:** $1{,}06^5$ =	5.978,07 €
6.	P_6 = 9.000,00 € entspricht K_6, gesucht ist P_0 = (K_0) = 9.000,00 € **:** $1{,}056^6$ =	6.344,64 €
	Summe der jährlichen Periodenüberschüsse	**44.220,64 €**
	- Anschaffungsauszahlung	45.000,00 €
	= Kapitalwert	- **779,36 €**

Zusammenstellung aller Ergebnisse	
Zinssatz	**Kapitalwert** unter den gegebenen Bedingungen
2 %	5.714,23 €
4 %	2.302,93 €
5 %	723,04 €
6 %	- 779,36 €

Die Kalkulationszinssätze und die sich daraus ergebenden Kapitalwerte sind in folgender Grafik dargestellt:



Im Ergebnis zeigt sich, dass mit steigendem Zinssatz die Kapitalwerte abnehmen. Das birgt die Gefahr, dass ein Unternehmer seine Investitionsrechnung „schönt“, indem er einen niedrigeren Kalkulationszinssatz in seine Berechnungen einsetzt, als es die Realität hergibt.

Die Folge: Er verwirklicht eine Investition, die bei realistischer Betrachtung keinen oder einen negativen Kapitalwert hat. Für die Investitionsentscheidung ist es also bedeutsam, sich über die gerade noch zulässige Höhe des Zinssatzes Klarheit zu verschaffen. Diese Überlegung führt zur internen Zinssatz-Methode.

3 Interne Zinssatz-Methode

Die interne Zinssatz-Methode geht von der Überlegung aus, dass es für eine geplante Investition einen Zinssatz gibt, bei dem der **Kapitalwert gleich Null** ist. Sofern der gesuchte interne Zinssatz **höher** ist als der realisierbare Zinssatz (z. B. der im vorigen Kapitel verwendete Zinssatz von 5 %/Jahr), ist eine Investition sinnvoll. Diesen internen Zinssatz gilt es zu bestimmen; er weist auf die Rentabilität einer Investition hin.

3.1 Lösung über lineare Interpolation

Was zunächst so einfach klingt, entpuppt sich als mathematisches Problem. Aus den Zahlen des Beispiels 1 und der Darstellung auf Seite 3 lässt sich folgende Gleichung erstellen, mit der die Abzinsung auf den Zeitpunkt t_0 unter Verwendung eines (noch) nicht bekannten Zinssatzes p %, der den Kapitalwert auf null setzen soll, allgemein darstellbar ist:

$$6500 : q + 8000 : q^2 + 9000 : q^3 + 14000 : q^4 + 8000 : q^5 + 9000 : q^6 - 45000 = 0$$

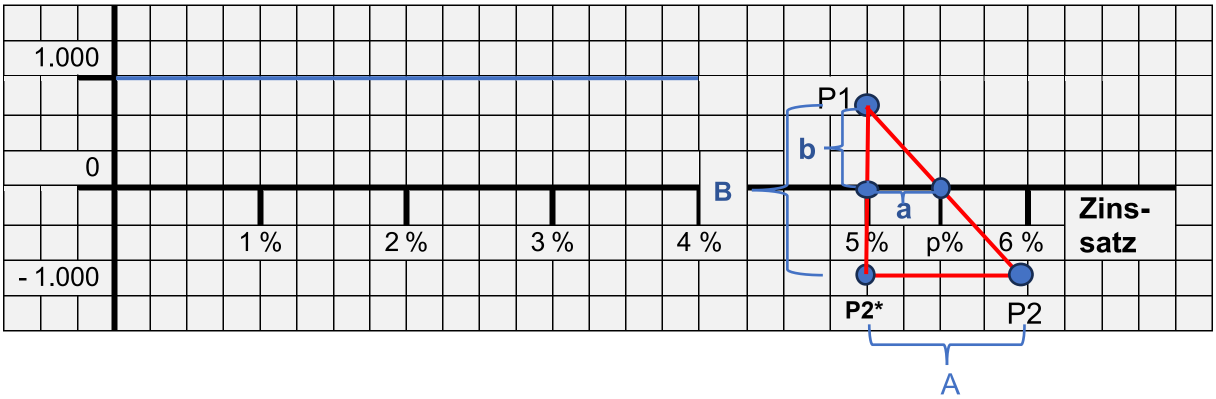
(mit q = 1+p/100)

Diese Gleichung enthält die Variable q, in der die gesuchte Größe p enthalten ist. Die Variable q kommt mit unterschiedlichen Koeffizienten (6500, 8000, …, 9000) und den Exponenten 1 bis 6 vor. Eine Lösung dieser Gleichung für den Fall, dass der Kapitalwert auf null gesetzt werden soll, ist - wie das folgende Beispiel zeigt - über die **lineare Interpolation** möglich.

Beispiel 1

Ausgehend von dem Kapitalwert +723,04 €, der dem Kapitalisierungszinssatz von 5 % entspricht, sowie dem Kapitalwert -779,36 €, der dem Kapitalisierungszinssatz von 6 % zugeordnet ist (vgl. Seite 6), soll mittels der linearen Interpolation und des Strahlensatzes (Verhältnisgleichung) näherungsweise die gesuchte Größe **p %** ermittelt werden, die dem Kapitalwert KW = 0 entspricht. Ausgangspunkte sind neben dem Auszug aus der obigen „Zusammenstellung der Ergebnisse“ auch die grafische Darstellung, soweit sie den Übergang des Kapitalwertes vom positiven in den negativen Bereich zeigen. Es kann schon jetzt gesagt werden, dass der gesuchte interne Zinssatz, der dem Kapitalwert gleich null zugeordnet werden kann, größer als 5 % sein wird, und dass sich damit die Investition lohnt.:

Kapitalisierungszinssatz	Kapitalwert
5 %	723,04 €
6 %	- 779,36 €



Zur Lösung des Problems dient das Steigungsdreieck im obigen Koordinatensystem:

Zwischen den Punkten P1 und P2, die aus den bekannten Werten in die Grafik eingetragen werden, wird eine lineare Verbindung hergestellt. Der gesuchte interne Zinssatz p % liegt zwischen 5 % und 6 % im Schnittpunkt der geraden Verbindungslinie (P1-P2) mit der waagerechten Achse des Koordinatensystems (p %). Durch senkrechte Verbindung der Punkte (P1-P2*) und waagerechte Verbindungen der Punkte (P2-P2*) entsteht das in Rot dargestellte Steigerungsdreieck. Die sich ergebenden Strecken werden wie folgt bezeichnet:

Die Strecke **A** hat die Länge (P2-P2*) = (6 % - 5 %) = (**0,06 – 0,05) = 0,01**
Die Strecke **a** hat die Länge **(p%-0,05).**
Die Strecke **B** hat die Länge (P2*-P1) = **(-779,36 – 723,04) = - 1502,4**
Die Strecke **b** hat die Länge (0-P1) = **(0 – 723,04)**.

Nach den Regeln der Verhältnisgleichung ergibt sich die folgende Proportion:

B : b = A : a

oder mit Zahlen:

(-1502,4) **:** (-723,04) = (0,01) **:** (p % – 0,05)

Nach dem Satz der Verhältnisgleichung, dass das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder ist, ergeben sich folgende Umformungen:

$-1502{,}4 \cdot (p\% - 0{,}05) = -723{,}04 \cdot 0{,}01 \quad \leftrightarrow$

$-1502{,}4 \cdot p\% + 75{,}12 = -7{,}2304 \quad \leftrightarrow$

$1502{,}4 \cdot p\% = 82{,}3504 \quad \leftrightarrow$

p% = 0,0548125 = 5,48125 %

p% ≈ 5,48 %

Der Näherungswert von p % = 5,48 % ist **größer** als der Kalkulationszinssatz (5 %). Damit wird nachgewiesen, dass sich die Investition lohnt.

Probe:

$$\frac{6.500}{1{,}0548} + \frac{8.000}{1{,}0548^2} + \frac{9.000}{1{,}0548^3} + \frac{14.000}{1{,}0548^4} + \frac{8.000}{1{,}0548^5} + \frac{9.000}{1{,}0548^6} - 45.000 = \mathbf{-7{,}33\ €}$$

Das Ergebnis von -7,33 € zeigt, dass mit dem Zinssatz von p % = 5,48 % eine sehr gute Annäherung an den Wert KW = 0 gelungen ist.

3.2 Lösung über Normalform der vollständigen quadratischen Gleichung

Eine einfachere Lösung lässt sich bei Situationen mit **zwei Periodenüberschüssen** - das entspricht dem Exponenten 2 – über die **vollständige quadratische Gleichung** erstellen:

Beispiel 2

Der Taxiunternehmer Igor Karmann plant zum Jahresbeginn 01 einen Parkplatz mit Schotterschicht auf seinem Grundstück. Die Anschaffungskosten betragen 10.000,00 €. Diesen Betrag kann er lt. AfA-Tabelle in zwei Jahren abschreiben. Zum Ende des ersten Jahres rechnet er mit einem Periodenüberschuss von 5.000,00 €, zum Ende des zweiten Jahres mit einem Periodenüberschuss von 6.000,00 €.
Welcher interne Zinssatz ergibt sich, wenn der Kapitalwert gleich null sein soll?

In folgender Tabelle sind die Werte übersichtlich dargestellt:

	t_0	t_1	t_2
Anschaffungsauszahlung zu Beginn des Jahres 01 (t_0)	10.000,00 €		
Periodenüberschüsse zum Ende der Jahre 01 (t_1) und 02 (t_2)		5.000,00 €	6.000,00 €

Der positive Wert von 1.000,00 €, der sich aus der Verrechnung der obigen beiden Periodenüberschüsse und der Anschaffungsauszahlung ergibt, kann nur über die Abzinsung auf den Anfangszeitpunkt t_0 auf seine Richtigkeit überprüft werden. Für die Abzinsung auf den Zeitpunkt t_0 ergibt sich aus der obigen Aufstellung:

$5.000 : q + 6.000 : q^2 - 10.000 = 0 \quad / \cdot q^2$

$5.000 \cdot q + 6.000 - 10.000 \cdot q^2 = 0$

Daraus wird folgende quadratische Gleichung ermittelt, in der die Exponenten eine absteigende Reihenfolge bilden:

$10.000 \cdot q^2 - 5.000 \cdot q - 6.000 = 0 \quad /: 10.000$

$\leftrightarrow$

$\mathbf{q^2 - 0{,}5 \cdot q - 0{,}6 = 0}$

Die Normalform der vollständigen quadratischen Gleichung wird üblicherweise mit der Variablen x und nicht – wie oben – mit der Variablen „q“ versehen und lautet allgemein:

$\mathbf{x^2 + px + q = 0}$

Betrachtet man die beiden obigen Gleichungen, so fällt auf: In der Normalform steht die Variable „x“ für „q“, die Variable „p“ nimmt den Wert –0,5 und die Variable „q“ der Wert -0,6 an. In der Schreibweise der vollständigen quadratischen Gleichung lautet der Ausdruck also:

$\mathbf{x^2 - 0{,}5 \cdot x - 0{,}6 = 0}$

Die Lösung quadratischer Gleichungen ergibt zwei Werte

$\mathbf{x_1 = -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}}$

$\mathbf{x_2 = -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}}$

Durch Einsetzen der entsprechenden Werte für p und q ergibt sich:

$x_{1,2} = 0{,}25 +/- \sqrt{0{,}25^2 + 0{,}6}$

$x_{1,2} = 0{,}25 +/- \sqrt{0{,}0625 + 0{,}6}$

$x_{1,2} = 0{,}25 +/- \sqrt{0{,}6625}$

$x_{1,2} = 0{,}25 +/- 0{,}813941$

$x_1 = 1{,}063941$

$x_2 = -\ 0{,}69499$

Der negative Wert entfällt, da er nicht realistisch ist, also gilt die Lösung für KW = 0:

$x_1 = 1{,}063941$

Der Wert $x_1 = 1{,}063941$ entspricht dem Aufzinsungsfaktor **q** = 1 + p/100; daraus folgt:

$(1 + p/100) = 1{,}063941$

$\leftrightarrow$

$p/100 = 0{,}063941$

$\leftrightarrow$

p % ≈ 6,39 %

Der interne Zinssatz beträgt 6,39 %. Für den Fall, dass der Kapitalwert auf der Grundlage eines Zinssatzes von 6,39 %/Jahr – oder einem **niedrigeren** Zinssatz, z. B. 5 %/Jahr – berechnet wird, lohnt sich die Investition. Übersteigt der Kapitalisierungszinssatz die Grenze des internen Zinssatzes von 6,39 %/Jahr, wird der Kapitalwert negativ – die Investition lohnt sich nicht.

Probe:

$5.000 \cdot 1{,}063941 + 6.000 - 10.000 \cdot 1{,}063941^2 =$

$\leftrightarrow$

$5.319{,}71 + 6.000 - 11.319{,}70 = 0{,}01$

Bei einem Zinssatz von p % = 6,3941 %/Jahr wird der Kapitalwert nahezu gleich null.