7.2 LORENTZ-Transformation und MINKOWSKI-Raum

LORENTZ-TRANSFORMATION

Ist Σ' ein Inertialsystem, das sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung von dem Inertialsystem Σ entfernt und am Zeitnullpunkt mit diesem zusammenfällt, so gelten folgende Beziehungen:

→ $x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \cdot (x' + v \cdot t')$

→ $t = \frac{t' + \beta \frac{x'}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \cdot \left(t' + \beta \frac{x'}{c}\right)$

→ $x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$

→ $t' = \frac{t - \beta \frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \cdot \left(t - \beta \frac{x}{c}\right)$

Mit den Abkürzungen:

$\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Die übrigen Koordinaten bleiben unbeeinflusst ($y = y'$ und $z = z'$).

TRANSFORMATION VON GESCHWINDIGKEITEN

Ist Σ' ein Inertialsystem, das sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung von dem Inertialsystem Σ entfernt, so gilt:

→ $w_x = \frac{w_x' + v}{1 + \beta \frac{w_x'}{c}}$

→ $w_y = \frac{w_y'}{1 + \beta \frac{w_x'}{c}}$

→ $w_z = \frac{w_z'}{1 + \frac{\beta w_x'}{c}}$

Hinweis: Die Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme zueinander unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen, der Betrag ist gleich, also $v = -v'$.

WICHTIGE EINHEITEN

Die Entfernung, die Licht in einer bestimmten Zeit zurücklegt wird als Lichtsekunde (Ls), Lichtminute (Lm), Lichtstunde (Lh), Lichttag (Ld) oder Lichtjahr (Lj) bezeichnet.

LÄNGENKONTRAKTION

In einem relativ zu einem Objekt bewegten Inertialsystem ist die Länge L' in Bewegungsrichtung kürzer als die Eigenlänge L des Objekts im unbewegten System:

$$L' = \frac{L}{\gamma} = L \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ZEITDILATATION

Von einem ruhenden Koordinatensystem aus betrachtet, vergeht die Zeit in einem bewegten Koordinatensystem langsamer:

$$t' = \frac{1}{\gamma} t = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} t \approx \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) t = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) t \quad \text{für } \beta = \frac{v}{c} \ll 1$$

7.2 LORENTZ-Transformation und MINKOWSKI-Raum

WELTPUNKTE

Ereignisse haben die Koordinaten $(c \cdot t,\ x, y, z)$ und werden als Weltpunkte bezeichnet. Der Abstand s zwischen zwei Weltpunkten ist von der Wahl des Inertialsystems unabhängig.

→ $s^2 := c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$.

Ist $s^2 > 0$ so heißt der Vektor zeitartig, bei $s^2 < 0$ heißt er raumartig und bei $s^2 = 0$ lichtartig. Der Lichtkegel trennt die absolute Vergangenheit, die absolute Zukunft und das absolute Anderswo voneinander.

RAUM-ZEIT-DIAGRAMM (MINKOWSKI-DIAGRAMM)

Die Ortsachse des ruhenden Systems ist waagerecht, die Zeitachse senkrecht. Die Achsen des bewegten Inertialsystems sind im Winkel $\tan\alpha = \frac{v}{c}$ geneigt. Koordinaten im bewegten System sind auf den Achsen des ruhenden Systems um den Faktor $\frac{1}{\gamma}$ verkürzt. Gleichzeitige Ereignisse liegen auf einer Geraden parallel zur entsprechenden Ortsachse. Ereignisse am gleichen Ort liegen auf einer Geraden parallel zur entsprechenden Zeitachse. Lichtstrahlen verlaufen unter einem Winkel von 45°.

ÄQUIVALENZ VON MASSE UND ENERGIE

Die relativistische Zunahme der Masse bei Beschleunigung beruht auf der Zufuhr von Energie. Die beiden Größen sind zueinander äquivalent und es gilt:

$W = m_{rel} \cdot c^2$

Die Energie $W_0 = m_0 \cdot c^2$ eines ruhenden Körpers heißt Ruheenergie, sie spielt in der Kern- und Teilchenphysik (→ Kapitel 8) eine große Rolle.

RELATIVISTISCHE GRÖSSEN

→ Abkürzungen: $\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$ und

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{W_{kin}}{W_0}$$

→ Masse: $m_{rel} = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

→ Impuls: $p_{rel} = m_{rel} \cdot v = \gamma \cdot m_0 \cdot v = m_0 c \cdot \sqrt{\gamma^2 - 1}$

$\vec{p}_{rel} = m_{rel}\,\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$

→ Ruheenergie: $W_0 = m_0 c^2$

→ Kinetische Energie: $W_{kin} = (\gamma - 1) m_0 c^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} m_0 v^2$

→ Gesamtenergie: $W = m_{rel} c^2 = \gamma m_0 c^2 = W_{kin} + m_0 c^2$

$$= \sqrt{W_0^2 + p_{rel}^2 c^2} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p_{rel}^2 c^2}$$