

3.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung

WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG EINER ZUFALLSVARIABLE X

mögliche Ergebnisse	Erwartungswert $(E(X); \mu)$	Varianz	Standardabweichung σ
$x_1, x_2, x_3 \dots x_n$	$E(X) = x_1 \cdot P(x_1) + \dots x_n \cdot P(x_n)$	$V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$	$\sigma = \sqrt{V(X)}$
Binomialverteilung	$E(X) = n \cdot p$	$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$	$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Der Erwartungswert bei Zufallsvariablen wird beim Überprüfen von fairen Glücksspielen ($\sigma = 0$) benötigt.

BINOMIALVERTEILUNG

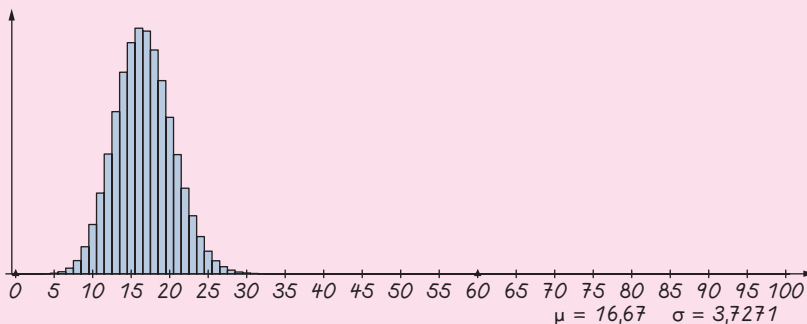
Bernoulli-Experiment: Zwei Zustände – z.B. (schwarz/weiß); (Treffer/Niete) – besitzen eine konstante Wahrscheinlichkeit p . Ein Experiment wird n -mal durchgeführt (Bernoulli-Kette der Länge n).

Dann gilt die Formel von Bernoulli für k Treffer:

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \text{ wobei } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \text{ und } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$$

HISTOGRAMM

Im Histogramm sind die Wahrscheinlichkeiten für $n = 100$ und $p = \frac{1}{6}$ dargestellt (mögliches Experiment: 100-mal Würfeln mit einem herkömmlichen Spielwürfel; Anzahl 6en)



3.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung

STANDARD-FRAGESTELLUNGEN

- Bestimmen Sie Wahrscheinlichkeiten für genaue Trefferanzahlen oder Intervalle.
- Ermitteln Sie die Anzahl der Würfe, die man mindestens durchführen müsste um mit 99 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine 6 dabei zu haben.
- Weiterhin kann nach dem Umfang n oder der Wahrscheinlichkeit p gefragt sein.
(Beispiele zu Berechnungen auf Seite 194)
- Einfachste Beispiele zur Formel von Bernoulli sind auch ohne Hilfsmittel zu berechnen.
Spätestens bei kumulierten (addierten) Wahrscheinlichkeiten ist das technische Hilfsmittel unverzichtbar!

GRENZWERTSATZ

Bedingung: Zufallsvariable X ist Summe von n voneinander unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$

$E(x)$ Erwartungswert;

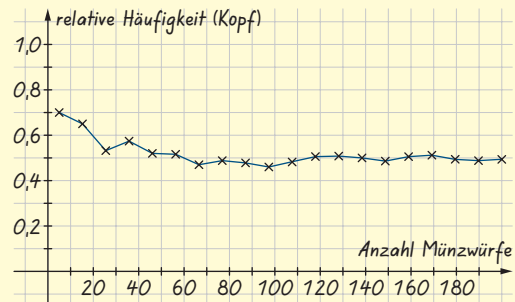
$V(x)$ Varianz;

n hinreichend groß ($n > 10$)

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - E(X)}{\sqrt{V(x)}}\right) = \Phi\left(\frac{x - E(x)}{\sigma}\right)$$

GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN

Wiederholt man ein Experiment genügend oft, so ist die gemessene relative Häufigkeit gleich der theoretischen Wahrscheinlichkeit.



GAUSS

Die GAUSS'sche Glockenfunktion lautet:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

GAUSS'sche Summenfunktion:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \quad (\text{links von } x \text{ liegender Flächeninhalt})$$

$$P(k_1 < x < k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_1}^{k_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi(k_2) - \Phi(k_1)$$

