

2.9 Grundfragen der Geometrie (1): Inzidenz und Lagebeziehungen

INZIDENZPROBLEME

→ Punkt A auf einer Geraden g

A in g einsetzen:

$$\vec{a} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

Gibt es für t eine eindeutige Lösung, liegt A auf der Geraden, sonst nicht.

→ Punkt A in einer Ebene E

A in E (am besten Koordinatenform) einsetzen:

Ergibt sich für

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = d$$

$d = d$, liegt der Punkt in E, sonst nicht.

→ Gerade g in einer Ebene E

Prüfen, ob zwei beliebige Punkte von g in E liegen, oder Gerade in Koordinatenform einsetzen, wenn sich ergibt $d = d$, dann liegt g in E, sonst nicht.

→ Punkt P auf einer Strecke $\overline{AB}$

Punkt in Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{AB}$

einsetzen. Ergibt sich $0 \leq t \leq 1$, liegt P auf der Strecke $\overline{AB}$, sonst nicht.

LAGEBEZIEHUNGEN GERADE - GERADE

Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{v}$$

→ g ist gleich h, wenn $\vec{u}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ und $\vec{q} - \vec{p}$ ebenfalls ein Vielfaches von $\vec{u}$, bzw. $\vec{v}$ ist.

Oder wenn Gleichsetzen der Geraden ein LGS mit unendlich vielen Lösungen ergibt.

→ g ist parallel zu h, wenn $\vec{u}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ aber $\vec{q} - \vec{p}$ kein Vielfaches von $\vec{u}$, bzw. $\vec{v}$ ist.

Oder wenn Gleichsetzen der Geraden ein LGS ergibt, in dem die Parameter r, t wegfallen, es aber keine Lösung gibt.

→ g schneidet h in einem Punkt, wenn $\vec{u}$ kein Vielfaches von $\vec{v}$ ist und Gleichsetzen ein LGS mit eindeutigen Lösungen für r und t ergibt.

→ g und h sind windschief, wenn $\vec{u}$ kein Vielfaches von $\vec{v}$ ist und Gleichsetzen ein LGS ohne eindeutige Lösungen für r und t ergibt.



2.9 Grundfragen der Geometrie (1): Inzidenz und Lagebeziehungen

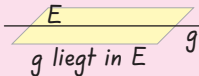
LAGEBEZIEHUNGEN GERADE - EBENE

Gegeben sind eine Gerade

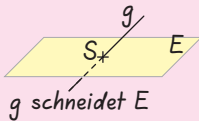
$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \text{ und eine Ebene}$$

$$E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

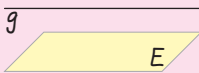
- **g liegt in E** , wenn zwei Punkte von g in E liegen, oder Einsetzen von g in E auf $d = d$ führt.



- **g schneidet E** , wenn Einsetzen von g in E genau eine Lösung für t ergibt.



- **g ist (echt) parallel zu E** , wenn Einsetzen von g in E auf $k \neq d$ führt.



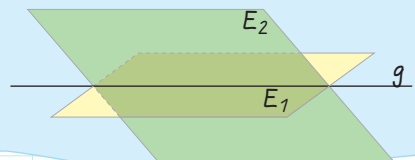
g verläuft parallel zu E

SCHNITTPUNKTE UND SCHNITTGERADEN

- **Schnittpunkt Gerade - Gerade**: Gleichsetzen der Geraden, LGS mit 3 Zeilen und zwei Unbekannten (Parametern) lösen. Einen der Parameter in die entsprechende Gleichung einsetzen.

- **Schnittpunkt Gerade - Ebene**: Am einfachsten, wenn E in Koordinatenform ist; dann g in E einsetzen, Parameter berechnen und in g einsetzen.

- **Schnittgerade Ebene - Ebene**: Am einfachsten, wenn eine Ebene in Parameterform und eine in Koordinatenform ist. Ebene in Parameterform in die Koordinatenform der anderen einsetzen, ergibt in der Regel einen Parameter, der in Abhängigkeit vom anderen ist. Einsetzen in die Parameterform und umstellen ergibt die Schnittgerade.



LAGEBEZIEHUNG EBENE - EBENE

Gegeben sind zwei Ebenen $E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$ und $F: \vec{x} = \vec{p} + r \vec{u} + s \vec{v}$

- **F ist (echt) parallel zu E** , wenn $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$ und P nicht in E liegt, oder wenn Einsetzen von F in E keine Lösung ergibt.
- **E und F sind gleich**, wenn $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$ und P in E liegt, oder wenn Einsetzen von F in E $d = d$ ergibt.
- **E und F schneiden sich in einer Geraden**, wenn $\vec{n} \circ \vec{u} \neq 0$ oder $\vec{n} \circ \vec{v} \neq 0$.