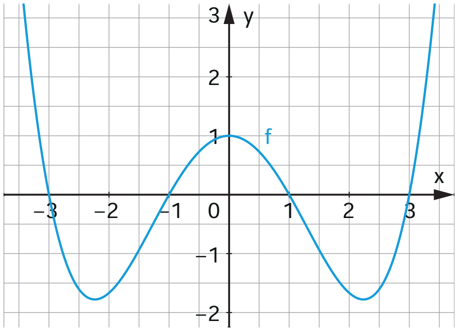
Aufgaben zur Vorbereitung auf die mündliche Abiturprüfung im Basisfach Mathematik

Ergänzung zu
FiNALE Prüfungstraining Abitur Baden-Württemberg
ISBN 978-3-7426-2175-7

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades f.



a) Erläutern Sie: Mithilfe der Achsenschnittpunkte des Graphen kann man den Funktionsterm bestimmen. C1 B1

b) Begründen Sie, dass die Funktion gegeben ist durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (x^4 - 10x^2 + 9)$.

c) Bestimmen Sie einen Zahlenterm für den Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse im Intervall $[-1\,;\,+1]$ einschließt. D1 D3

d) Skizzieren Sie den Graphen einer trigonometrischen Funktion g, die die gleichen Achsenschnittpunkte hat wie die Funktion f. Bestimmen Sie deren Funktionsgleichung. B9

Lösung

a) Mithilfe der Nullstellen kann man die Linearfaktoren des Funktionsterms aufstellen. Aus dem Funktionswert an der Stelle $x = 0$ kann man den Streckungsfaktor bestimmen.

b) Aus dem Produkt der Linearfaktoren ergibt sich in einem ersten Ansatz der Funktionsterm $f(x) = a \cdot (x+3)(x+1)(x-1)(x-3)$. Durch Umformen erhält man hieraus mithilfe der dritten binomischen Formel $f(x) = a \cdot (x^2-1)(x^2-9)$ und durch Ausmultiplizieren den in der Aufgabenstellung angegebenen Klammerterm $(x^4 - 10x^2 + 9)$. Wegen $f(0) = 1$ ergibt sich dann $f(0) = a \cdot (0 - 0 + 9) = a \cdot 9 = 1$, also $a = \frac{1}{9}$.

c) Eine Stammfunktion F für f ist gegeben durch $F(x) = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x\right)$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und wegen der Achsensymmetrie des Graphen zur y-Achse ergibt sich daher für den Flächeninhalt

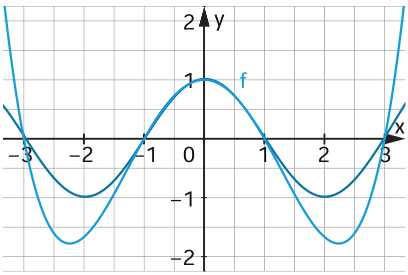
$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x\right)\right]_{-1}^{+1} = 2 \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x\right)\right]_{0}^{+1} = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{10}{3} + 9\right).$$

d) Da der Graph der ganzrationalen Funktion f symmetrisch zur y-Achse ist, bietet sich ein Ansatz mithilfe einer Kosinusfunktion an: $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$.

Da der gesuchte Graph weder nach oben oder unten noch nach rechts oder links verschoben ist, gilt $c = 0$ und $d = 0$.

Da der gesuchte Graph ebenfalls durch den Schnittpunkt $(0\,;\,1)$ mit der y-Achse verlaufen soll, gilt für die Amplitude: $a = 1$.

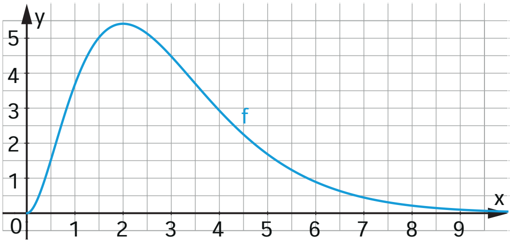
Da die Nullstellen jeweils den Abstand 2 voneinander haben, ergibt sich eine Periodenlänge von 4 Einheiten und hieraus der Streckungsfaktor $b = \frac{\pi}{2}$ in Richtung der x-Achse und somit der Funktionsterm $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.



Hinweis: Ein Ansatz mithilfe einer Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ ergibt abweichend für c den Wert $c = 1$, also $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (x+1)\right)$, da der Graph der (in x-Richtung gestreckten) Sinusfunktion um 1 Einheit nach links verschoben werden muss.

Aufgabe 2

Die folgende Abbildung zeigt die Geschwindigkeit (in m/s) eines Modellfahrzeugs während der ersten 10 Sekunden einer Fahrt.



a) Beschreiben Sie den Bewegungsablauf mit Worten.

Die Bewegung kann mithilfe der Modellfunktion f mit $f(x) = 10x^2 \cdot e^{-x}$ beschrieben werden.

b) Zu welchem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit maximal? Welche Geschwindigkeit hat das Fahrzeug in diesem Moment? **B5**

c) Wie könnte man die Zeitpunkte der größten Geschwindigkeitsänderung bestimmen? **B6**

d) Zeigen Sie, dass $F(x) = -10 \cdot (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion für f(x) ist. **D1** **D5**

Welche für den Vorgang interessierende Größe könnte man mithilfe dieser Stammfunktion berechnen?

Lösung

a) Nach dem Start (Geschwindigkeit = 0 m/s) wächst die Geschwindigkeit immer stärker, dann (nach dem Wendepunkt der Kurve) wächst sie weniger stark, aber immer noch weiter bis zu einer maximalen Geschwindigkeit, dann wird das Modellfahrzeug langsamer. Nach dem zweiten Wendepunkt wird die Abnahme der Geschwindigkeit immer geringer, bis das Fahrzeug nach ungefähr 10 s praktisch stehen bleibt.

b) Bestimmung des Maximums mithilfe der 1. Ableitung der Modellierungsfunktion:

$f'(x) = 10 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 10 \cdot x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 10 \cdot (2x - x^2) \cdot e^{-x}$.

Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Hochpunkts ist

$f'(x) = 10 \cdot (2x - x^2) \cdot e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (2 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2.$

Wegen des Vorzeichenwechsels von + (steigend) nach – (fallend) der 1. Ableitung liegt an der Stelle $x = 2$ ein Hochpunkt vor.

Es gilt: $f(2) = 10 \cdot 2^2 \cdot e^{-2} = 40 \cdot e^{-2} \approx 5{,}4$ m/s.

c) Die Zeitpunkte maximaler Geschwindigkeitsänderung erhält man mithilfe der Nullstellen der 2. Ableitung:

$f''(x) = 10 \cdot (2 - 2x - 2x + x^2) \cdot e^{-x} = 10 \cdot (2 - 4x + x^2) \cdot e^{-x}$, d. h. mithilfe der Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 2 = 0$.

d) Der Nachweis kann dadurch erfolgen, dass man die angegebene Funktion F ableitet:
$F'(x) = -10 \cdot (2x + 2 - x^2 - 2x - 2) \cdot e^{-x} = -10 \cdot (-x^2) \cdot e^{-x} = f(x)$.

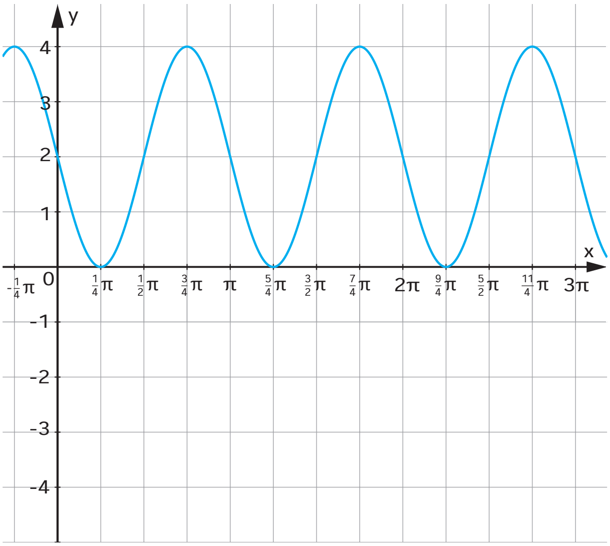
Beispielsweise kann man berechnen, welche Strecke das Modellfahrzeug nach 10 s zurückgelegt hat:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \left[-10 \cdot (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}\right]_0^{10}.$$

Aufgabe 3

a) Erläutern Sie, warum der abgebildete Graph durch die Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot \sin\left(2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$ beschrieben werden kann.

B9 B2 B3



b) Berechnen Sie die Steigung des Graphen an der Stelle $x = 0$.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f in das o. a. Koordinatensystem.

d) Geben Sie begründet ein Intervall $[a\,;\,b]$ sowie eine Konstante c an, sodass gilt

$$\int_a^b (f(x) - c)\,dx = 0\,.$$

Lösung

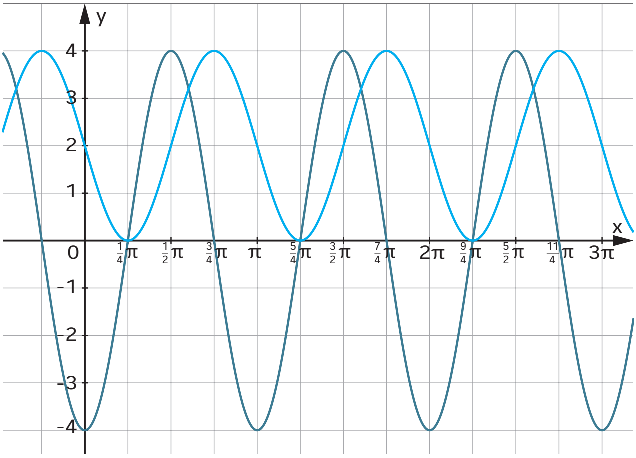
a) Betrachtet man allgemein die Koeffizienten a, b, c, d in der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$, dann ergibt sich im Einzelnen aus der Abbildung:

- Die Periodenlänge beträgt π (z. B. ablesbar zwischen der Lage benachbarter Hochpunkte); hieraus ergibt sich der Faktor $b = 2$ (Streckungsfaktor in Richtung der x-Achse).

- Die Amplitude beträgt 2 Einheiten (halber Abstand zwischen den y-Werten von Tief- und Hochpunkten); hieraus ergibt sich der Faktor $a = 2$ (Streckungsfaktor in Richtung der y-Achse). Der Graph der Sinusfunktion ist um $d = 2$ Einheiten nach oben verschoben und um $c = \frac{\pi}{2}$ nach rechts.

b) Die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot 2$ hat an der Stelle $x = 0$ den Wert $f'(0) = 4 \cdot \cos\left(2 \cdot \left(0 - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4 \cdot \cos(-\pi) = -4$.

c) Aus Teilaufgabe b) ergeben sich die maximalen Steigungen des Graphen von f, also die Funktionswerte +4 bzw. −4 in den Hoch- und Tiefpunkten des Graphen von f′.

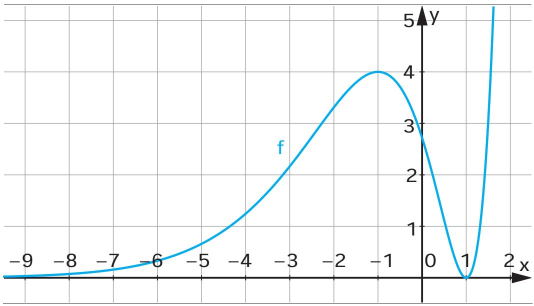


d) Verschiebt man den Graphen von f um 2 Einheiten nach unten, dann wird die o. a. Verschiebung um d = 2 aufgehoben. Dann ist der nach unten verschobene Graph punktsymmetrisch zu seinen Nullstellen und das Integral über eine Periodenlänge bei dieser Funktion ergibt dann den Wert null.

Daher gilt: $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (f(x) - 2)\,dx = 0.$

Aufgabe 4 (ohne WTR)

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



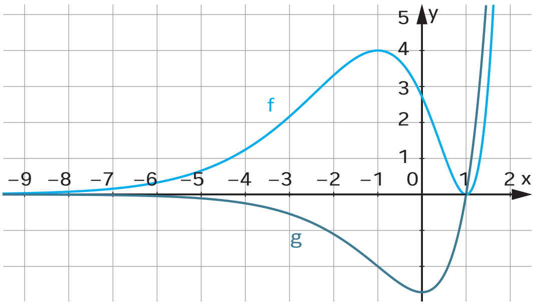
a) Es gilt $f(0) = e$. Bestimmen Sie näherungsweise einen Wert für $f'(0)$.

b) Gilt $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx > 4$ oder $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx < 4$?

c) Beschreiben Sie den qualitativen Verlauf der Funktion $F(x) = \int_{+1}^{x} f(t)\,dt$ links und rechts von der Stelle $x = +1$. Begründen Sie: Der Graph von F(x) hat an der Stelle $x = +1$ eine Sattelstelle. B6

d) Der oben abgebildete Graph hat die Funktionsgleichung $f(x) = (x - 1)^2 \cdot e^{x+1}$. Welche Funktionsgleichungen erhält man, wenn man den Graphen um 1 Einheit nach links bzw. nach rechts verschiebt? B3

e) In der folgenden Abbildung ist zusätzlich zum Graphen von f auch der Graph von $g(x) = (x - 1) \cdot e^{x+1}$ eingetragen. An den Stellen $x = -1$ und $x = +1$ liegen bei beiden Graphen besondere Punkte vor. Welche Eigenschaften vermuten Sie (keine Rechnung verlangt)? B4 B5 B6

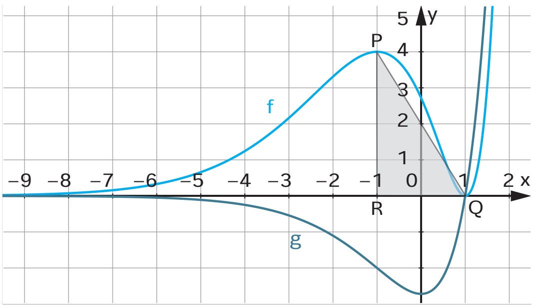


Lösung

a) Durch Einzeichnen einer Tangente findet man eine Steigung von ungefähr −e.

b) Verbindet man die Punkte P(−1|4) und Q(1|0) miteinander, dann kann man ablesen, dass das Flächenstück oberhalb der Verbindungslinie größer ist als das Flächenstück unterhalb. Das heißt: Das Flächenstück unter dem Graphen von f(x) im Intervall [−1; +1] hat einen größeren Flächeninhalt als das rechtwinklige Dreieck PQR, wobei R(−1|0).

Der Flächeninhalt des Dreiecks PQR ist $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$, also gilt: $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx > 4$.



c) Die Funktion $F(x) = \int_{+1}^{x} f(t)\,dt$ hat an der Stelle $x = +1$ eine Nullstelle, denn $F(1) = \int_{+1}^{+1} f(t)\,dt = 0$.

Geht man von $x = +1$ nach links, dann ergeben sich negative Werte für das Integral, da der Graph von $f(x)$ oberhalb der x-Achse liegt, aber die obere Integrationsgrenze unterhalb der unteren Integrationsgrenze liegt. Geht man von $x = +1$ nach rechts, dann ergeben sich positive Werte für das Integral.

An der Stelle $x = +1$ hat $f(x)$ einen Tiefpunkt mit $f(1) = 0$, außerdem gilt $f'(1) = 0$ und $f'(x)$ hat einen VZW von − nach + an der Stelle $x = 1$. Somit gilt:

$F'(1) = f(1) = 0$ und $F''(1) = f'(1) = 0$ mit VZW von $F''(x)$ an der Stelle $x = 1$, d. h., $F(x)$ hat an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente, also einen Sattelpunkt.

d) Verschieben des Graphen von $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{x+1}$ um 1 Einheit nach rechts bedeutet:

Die Variable x durch $x - 1$ ersetzen, also $f^*(x) = ((x-1)-1)^2 \cdot e^{(x-1)+1} = (x-2)^2 \cdot e^x$.

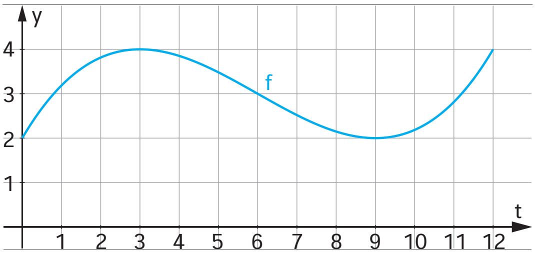
Verschieben des Graphen von $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{x+1}$ um 1 Einheit nach links bedeutet:

Die Variable x durch $x + 1$ ersetzen, also $f^{**}(x) = ((x+1)-1)^2 \cdot e^{(x+1)+1} = x^2 \cdot e^{x+2}$.

e) Doppelte Nullstelle von $f(x)$ und einfache Nullstelle von $g(x)$ an der Stelle $x = +1$, Hochpunkt von $f(x)$ und Wendepunkt von $g(x)$ an der Stelle $x = -1$.

Aufgabe 5

Die folgende Grafik zeigt, wie sich die Füllmenge einer Talsperre im Laufe des letzten Jahres verändert hat (Füllmenge in Millionen Kubikmeter; Zeitangaben: $t = 0 \mathrel{\hat{=}} 1$. Januar, $t = 1 \mathrel{\hat{=}} 1$. Februar usw., die ungleiche Länge der einzelnen Monate soll nicht beachtet werden).



Die Entwicklung kann näherungsweise mithilfe der Modellfunktion f beschrieben werden, wobei

$f(t) = \frac{1}{54} t^3 - \frac{1}{3} t^2 + \frac{3}{2} t + 2.$

a) Beschreiben Sie die Entwicklung der Füllmenge im Laufe des Jahres mit Worten. Welche Rechnungen wären notwendig, um Ihre Aussagen bzgl. der Zeitpunkte der größten und der kleinsten Füllmenge zu bestätigen? B5

b) Bestimmen Sie die Zeitpunkte des Jahres, in denen sich die Füllmenge am stärksten verändert hat. B6

c) Welche Füllmenge hätte sich am Jahresende ergeben, wenn sich der Wasserstand entsprechend der Änderungsrate vom 1. Juli weiterentwickelt hätte? (Lösung auch zeichnerisch möglich) A3

d) Welche Bedeutung hat die Gleichung $f(t+1) = f(t) - 1$ in der hier beschriebenen Anwendungssituation? Warum hat diese Gleichung in diesem Fall keine Lösung?

Lösung

a) Die Füllmenge wuchs bis zum 1. April und fiel dann bis zum 1. Oktober. Am 1. Juli war der Zeitpunkt der größten Abnahme. Am 1. Januar lag die gleiche Füllmenge vor wie am 1. Oktober, und am 1. April die gleiche Füllmenge wie am 31. Dezember.
Zum Nachweis müssen die Funktionswerte für die angegebenen Zeitpunkte berechnet werden. Für das lokale Maximum bzw. Minimum muss nachgewiesen werden, dass die notwendige Bedingung erfüllt ist:

$$f'(t) = \frac{1}{18}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{3}{2} = \frac{1}{18} \cdot (t^2 - 12t + 27) = \frac{1}{18} \cdot (t-3)(t-9) = 0$$

und dass an den Stellen $t = 3$ bzw. $t = 9$ tatsächlich ein VZW von $f'(t)$ vorliegt.

b) Gesucht sind Extremwerte von $f'(t)$. Es gilt $f''(t) = \frac{1}{9}t - \frac{2}{3}$. Eine Nullstelle der 2. Ableitung liegt vor, wenn $t = 6$; die 2. Ableitung hat dort einen VZW, d. h. tatsächlich liegt hier ein Wendepunkt des Graphen. Die Änderungsrate am 1. Juli beträgt:

$$f'(6) = \frac{1}{18} \cdot 36 - \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{3}{2} = 2 - 4 + 1{,}5 = -0{,}5.$$

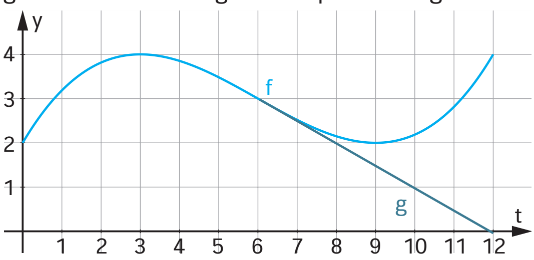
Der Betrag der Änderungsrate am 1. Januar und am 31. Dezember ist jedoch größer:

$$f'(0) = 1{,}5 \text{ und } f'(12) = \frac{1}{18} \cdot 144 - \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{3}{2} = 8 - 8 + 1{,}5 = 1{,}5.$$

c) Gesucht ist die lineare Funktion $g(t)$, deren Graph durch den Punkt $(6 \mid f(6))$ verläuft und deren Steigung durch $f'(6)$ gegeben ist:

$$f(6) = \frac{1}{54} \cdot 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 + \frac{3}{2} \cdot 6 + 2 = 4 - 12 + 9 + 2 = 3 \text{ und } f'(6) = -0{,}5 \text{ (vgl. Teilaufgabe b).}$$

Die Gleichung der Tangentenfunktion ist also $g(t) = -0{,}5 \cdot (t-6) + 3 = -0{,}5t + 6$. Diese Gerade schneidet die t-Achse bei $t = 12$, d. h., am Jahresende wäre bei fortgesetzt gleicher Entwicklung die Talsperre leer gewesen.



d) Die Gleichung $f(t+1) = f(t) - 1$ besagt: Gesucht ist ein Zeitpunkt t während des Jahres, für den gilt, dass einen Monat später (also zum Zeitpunkt $t + 1$) die Füllmenge 1 Million Kubikmeter geringer ist als zum Zeitpunkt t (also $f(t) - 1$). Da in Teilaufgabe c) herausgefunden wurde, dass die betraglich größte negative Änderungsrate gleich $-0{,}5$ beträgt, besitzt die Gleichung keine Lösung – die Abnahme der Füllmenge innerhalb eines Zeitraums von einem Monat war im betrachteten Jahr stets kleiner als 0,5 Mio. m^3.

Aufgabe 6

Eine Ebene E ist gegeben durch die Parameterdarstellung E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit

A(1 ; –1 ; 2) und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie: Der Punkt P(2,25 ; –0,5 ; 3) liegt in dem von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramm mit Eckpunkt A. Liegt es auch in dem von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Dreieck? F3

b) Geben Sie eine Bedingung für die Komponenten eines Vektors $\vec{w}$ an, der zu $\vec{u}$ orthogonal ist, und bestimmen Sie hiermit einen Normalenvektor zur Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E. E2

c) Begründen Sie, warum die Gerade g mit g: $\vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{u}$ mit B(1 ; 1 ; 1) parallel zur Ebene E verläuft. Wie kann man den Abstand der Geraden von der Ebene berechnen? F5 G3

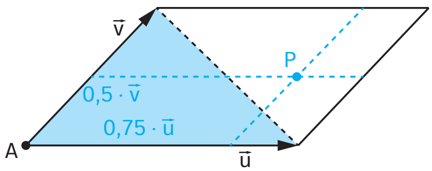
d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt T der Gerade g mit der x_1x_2-Ebene. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade g diese Koordinatenebene? F5 G1

Lösung

a) Der Punkt P liegt genau dann im angegebenen Parallelogramm, wenn die Parameterwerte r und s die Ungleichung $0 \le r,s \le 1$ erfüllen. Gilt außerdem $0 \le r + s \le 1$, dann liegt der Punkt in dem angegebenen Dreieck. Wenn der Punkt P in der Ebene liegt, hat das lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen eine Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}25 \\ -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{r} r + s = 1{,}25 \\ s = 0{,}5 \\ 2r - s = 1 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} r = 0{,}75 \\ s = 0{,}5 \\ r = 0{,}75 \end{array} \right|.$$

Der Punkt liegt also in dem von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramm, aber nicht in dem am Punkt A liegenden Dreieck.



b) Für die Komponenten w_1, w_2, w_3 von $\vec{w}$ muss gelten:
$1 \cdot w_1 + 2 \cdot w_3 = 0$, also $w_3 = -0{,}5 \cdot w_1$. Da auch der Vektor $\vec{v}$ orthogonal zu $\vec{w}$ sein soll, muss auch die Gleichung $w_1 + w_2 - w_3 = 0$ erfüllt sein. Ersetzt man w_3 in dieser Gleichung durch $-0{,}5 \cdot w_1$, dann ergibt sich die Bedingung $1{,}5\,w_1 + w_2 = 0$, also $w_2 = -1{,}5\,w_1$.

Wählt man beispielsweise $w_1 = 2$, dann ergibt sich $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene E.

Einsetzen der Koordinaten des Punkts A in die Koordinatengleichung $2x_1 - 3x_2 - x_3 = d$ ergibt dann
$d = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 3$, also E: $2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3$.

c) Da der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden orthogonal ist zum Normalenvektor $\vec{w}$ der Ebene, liegt g parallel zur Ebene E.

Hinweis: Die Punktprobe $2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 1 \neq 3$ zeigt, dass der Punkt B nicht in der Ebene E liegt und daher auch nicht die Gerade g. Dass der Punkt B nicht in der Ebene E liegt, ergibt sich aber auch automatisch aus der folgenden Berechnung des Abstands von B zu E.
Die Lotgerade h der Ebene E, die vom Punkt B ausgeht, kann durch die Parameterdarstellung $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-3t \\ 1-t \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Der Schnittpunkt S dieser Geraden mit der Ebene E erfüllt die Koordinatengleichung der Ebene, d. h., es gilt: $2 \cdot (1+2t) - 3 \cdot (1-3t) - 1 \cdot (1-t) = 3$, also $2 + 4t - 3 + 9t - 1 + t = 3$ oder $14t = 5$, d. h. $t = \frac{5}{14}$.

Der Schnittpunkt S hat daher die Darstellung $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{10}{14} \\ 1 - \frac{15}{14} \\ 1 - \frac{5}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{14} \\ -\frac{1}{14} \\ \frac{9}{14} \end{pmatrix}$,

der Verbindungsvektor ist $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} \frac{10}{14} \\ -\frac{15}{14} \\ -\frac{5}{14} \end{pmatrix}$ und dessen Länge ist gleich

$$|\overrightarrow{BS}| = \sqrt{\left(\tfrac{10}{14}\right)^2 + \left(-\tfrac{15}{14}\right)^2 + \left(-\tfrac{5}{14}\right)^2} = \frac{\sqrt{350}}{14} = \frac{5 \cdot \sqrt{14}}{14}.$$

Dies ist der Abstand des Punktes B von der Ebene E.

d) Für den Schnittpunkt T der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+2t \end{pmatrix}$ mit der x_1x_2-Ebene gilt:

Die x_3-Koordinate ist gleich null, d. h., es gilt $1 + 2t = 0$, also $t = -0{,}5$. Der Schnittpunkt T hat die Koordinaten T (0,5 ; 1 ; 0). Für den Winkel α zwischen dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Geraden und dem Normalenvektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der $x_1 x_2$-Ebene gilt:

$\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot 1} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, also $\alpha \approx 26{,}6°$, d. h. der gesuchte Winkel zwischen Gerade und Ebene ist der Ergänzungswinkel hierzu, also 63,4°.

Hinweis: Den gesuchten Winkel kann man auch direkt bestimmen, indem man die Gleichung $\sin(\alpha^*) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ löst.

Aufgabe 7

Eine Gerade g ist gegeben durch die Parameterdarstellung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen. F5

b) Bestimmen Sie Punkte auf der Geraden g, die vom Punkt P(1 ; 1 ; 0) den Abstand 6 haben. E3 E1

c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung einer Ebene E, die von der Geraden g senkrecht geschnitten wird und den Ursprung enthält. F4

d) Zeigen Sie: Der Schnittpunkt T der Geraden g mit der Ebene E hat die Koordinaten $T\left(\frac{7}{9}; \frac{10}{9}; \frac{2}{9}\right)$. Welchen Punkt erhält man, wenn man den Ursprung am Punkt T spiegelt? F5 F7

Lösung

a) Um die Schnittpunkte der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2r \\ 1+r \\ 2r \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenebenen zu bestimmen, müssen die einzelnen Komponenten gleich null gesetzt werden:

x_2x_3-Ebene: Die x_1-Koordinate ist gleich null, also $r = 0{,}5$; Schnittpunkt ist der Punkt $S_1(0 ; 1{,}5 ; 1)$,

x_1x_3-Ebene: Die x_2-Koordinate ist gleich null, also $r = -1$; Schnittpunkt ist der Punkt $S_2(3 ; 0 ; -2)$,

x_1x_2-Ebene: Die x_3-Koordinate ist gleich null, also $r = 0$; Schnittpunkt ist der Punkt $S_3(1 ; 1 ; 0)$.

b) Um diese beiden Punkte zu bestimmen, muss man einen Vektor der Länge 6 von P aus abtragen. Der Richtungsvektor der Geraden hat die Länge $\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, also muss das 2-Fache bzw. das (−2)-Fache des Richtungsvektors von P aus abgetragen werden. Damit erhält man für $r = 2$ den Punkt $(-3 ; 3 ; 4)$ und für $r = -2$ den Punkt $(5 ; -1 ; -4)$.

c) Ein Normalenvektor der Ebene ist durch den Richtungsvektor der Geraden gegeben, d. h., eine Koordinatengleichung der Ebene lautet $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$; da der Ursprung in dieser Ebene liegen soll, ergibt sich $d = 0$, d. h., eine Koordinatengleichung der gesuchten Ebene ist $E: -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

d) Die Koordinaten des Schnittpunkts T der Geraden mit der Ebene erhält man durch Einsetzen der Parameterdarstellungen der einzelnen Komponenten in die Koordinatengleichung der Ebene:

$-2 \cdot (1 - 2r) + 1 \cdot (1 + r) + 2 \cdot (2r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 + 4r + 1 + r + 4r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{9}$,

also $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{9} \\ 1 + \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

Den Spiegelpunkt O* erhält man, indem man vom Punkt T aus den Vektor $\vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ abträgt, also verdoppelt, d. h. $O^*\left(\frac{14}{9}; \frac{20}{9}; \frac{4}{9}\right)$.

Aufgabe 8

Eine Ebene E ist gegeben durch die Punkte $A(1;-1;-1)$, $B(-1;2;1)$ und $C(3;0;1)$.

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E. **F3**

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Ebene mit der x_1-Achse. **F4** **F5**

c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden g der Ebene E mit der x_1x_2-Ebene. **F5**

d) Zeigen Sie: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E.

Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der x_1x_3-Ebene. **E2** **G1**

Lösung

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-(-1) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-(-1) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2r+2s \\ -1+3r+s \\ -1+2r+2s \end{pmatrix}$

b) Für Punkte der x_1-Achse gilt: $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, d. h. zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} -1+3r+s=0 \\ -1+2r+2s=0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 3r+s=1 \\ 2r+2s=1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} -6r-2s=-2 \\ 2r+2s=1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 3r+s=1 \\ -4r=-1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} s=1-3r=\frac{1}{4} \\ r=\frac{1}{4} \end{array} \right|$$

Setzt man diese Parameterwerte ein, so ergibt sich $S(1;0;0)$.

c) Die x_1x_2-Ebene lässt sich mithilfe der Koordinatengleichung $x_3 = 0$ beschreiben. Die gemeinsamen Punkte der beiden Ebenen erfüllen beide Gleichungen, d. h. es muss gelten $-1+2r+2s=0$, also $s = 0{,}5 - r$. Ersetzt man den Parameter s in der Parameterdarstellung der Ebene E, dann ergibt sich eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1-2r+2\cdot(0{,}5-r) \\ -1+3r+(0{,}5-r) \\ -1+2r+2\cdot(0{,}5-r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4r \\ -0{,}5+2r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Es muss gezeigt werden, dass das Skalarprodukt des Normalenvektors mit den beiden Richtungsvektoren der Ebene jeweils null ergibt:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2+6-4=0 \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2+2-4=0.$$

Der Vektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der x_1x_3-Ebene. Somit ergibt sich für den Winkel zwischen den beiden Ebenen (= Winkel zwischen den Normalenvektoren der beiden Ebenen):

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{9} \cdot 1} = \frac{2}{3}, \text{ d. h. } \alpha \approx 48{,}2°.$$

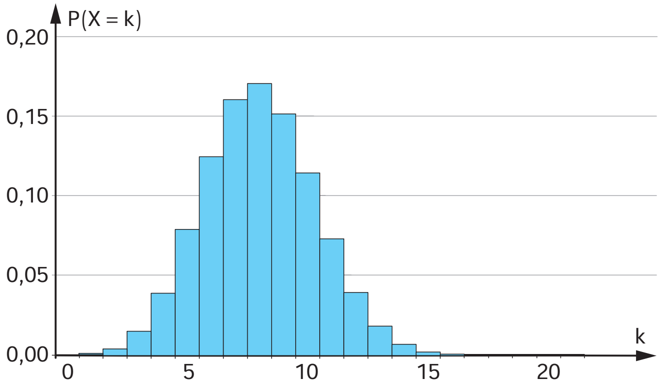
Aufgabe 9

In einem Ziehungsgefäß sind 4 rote und 8 grüne Kugeln, die nacheinander mit Zurücklegen gezogen werden.

a) Bestimmen Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit, dass beim 4-fachen Ziehen
   (1) alle gezogenen Kugeln grün sind, H1
   (2) genauso viele grüne wie rote Kugeln gezogen werden. H1 I3

b) Das Zufallsexperiment wird 24-mal durchgeführt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft eine rote Kugel gezogen wurde. Bestimmen Sie I3 I6
   (1) den Erwartungswert der Zufallsgröße,
   (2) die Wahrscheinlichkeit, dass genau 8 rote Kugeln gezogen werden,
   (3) die Wahrscheinlichkeit, dass mehr grüne als rote Kugeln gezogen werden.

c) Bei dem folgenden Histogramm einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit n = 24 kann man ablesen, dass das Maximum der Verteilung bei X = 8 liegt. Kann man sicher sein, dass hier die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X dargestellt wird? I6



d) Geben Sie jeweils einen Term für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses P(X = 7) und P(X = 8) an (gemäß der Bernoulli-Formel).

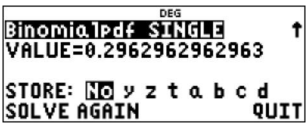
   Zeigen Sie mithilfe dieser beiden Terme, dass gilt: $P(X = 7) \cdot \frac{17}{16} = P(X = 8)$. H1 I6

Lösung

a) (1) $\left(\frac{8}{12}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

   (2) $6 \cdot \left(\frac{8}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{12}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$

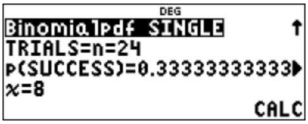
   (Dies kann auch mithilfe des TR berechnet werden:
   Binomialverteilung mit n = 4 und $p = \frac{1}{3}$: $P(X = 2) \approx 0{,}296$)



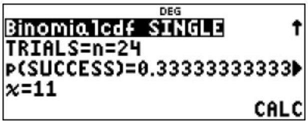
b) Betrachtet wird ein 24-stufiger Bernoulli-Versuch mit $p = \frac{1}{3}$.

(1) $\mu = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8$

(2) $P(X = 8) = \text{binompdf}(24, \frac{1}{3}, 8) \approx 0{,}171$



(3) „mehr grüne als rote Kugeln“ bedeutet „weniger rote als grüne“, also $X < 12$;
$P(X < 12) = P(X \leq 11) = \text{binomcdf}(24, \frac{1}{3}, 11) \approx 0{,}932$



c) Das Maximum der Verteilung liegt zwar bei $X = 8$, es könnte also die Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $n = 24$ und $p = \frac{1}{3}$ sein, aber aus der Lage des Maximums kann man nur ablesen, dass gilt: $7 < \mu < 9$, d. h. $7 < 24\,p < 9$, also $\frac{7}{24} < p < \frac{9}{24}$.

d) $P(X = 7) = \binom{24}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^{17} = \frac{24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 18}{7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^{17}$

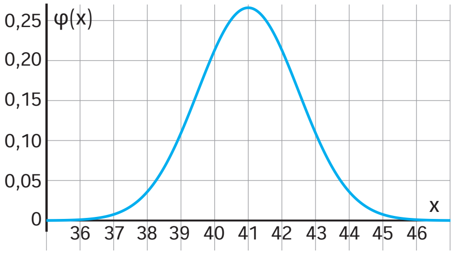
$P(X = 8) = \binom{24}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^{16} = \frac{24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 17}{8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^{16}$

Um den Faktor zu bestimmen, muss der Quotient $\frac{P(X = 8)}{P(X = 7)}$ gebildet werden:

$$\frac{P(X = 8)}{P(X = 7)} = \frac{24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 17}{8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1}{24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 18} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{17}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{16}$$

Aufgabe 10

Die Brötchen aus einer Großbäckerei haben ein durchschnittliches Gewicht von 41 g bei einer Standardabweichung von 1,5 g. Das Gewicht eines Brötchens kann näherungsweise mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße X beschrieben werden. Die folgende Grafik zeigt die zugehörige Glockenkurve. Veranschaulichen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen in den Teilaufgaben a) und b) jeweils durch Schraffuren der zughörigen Flächen unter der Glockenkurve.



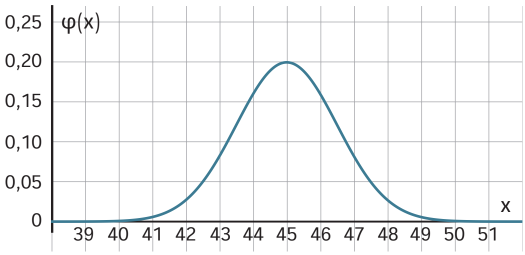
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Brötchen mehr als 40 g wiegt. I7

b) Bestimmen Sie ein zum Erwartungswert symmetrisch liegendes Intervall, in dem das Gewicht eines Brötchens mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % liegt. I7

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewähltes Brötchen ein Gewicht von genau 39 g?
Wenn man im Alltag davon spricht, dass ein Brötchen ein Gewicht von 39 g hat, dann meint man üblicherweise damit, dass das Gewicht im Intervall [38,5 g ; 39,5 g [liegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall? I7

d) Der Brötchenlieferant garantiert, dass die ausgelieferten Brötchen mindestens ein Gewicht von 37,5 g haben. Zeigen Sie, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 1 % ein Brötchen findet, das dieser Angabe nicht entspricht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf von 20 Brötchen mindestens ein Brötchen mit Untergewicht findet? I7 I3

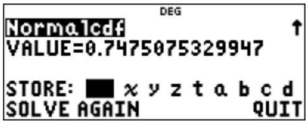
e) Die folgende Grafik zeigt die Glockenkurve des normalverteilten Gewichts von Körnerbrötchen. Erläutern Sie, wie man in dieser Grafik den Erwartungswert und die Standardabweichung ablesen kann. I7

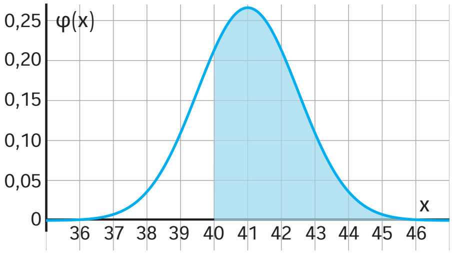


Lösung

a) P(X > 40) = normcdf(41,1.5,40,∞) ≈ 74,75 %

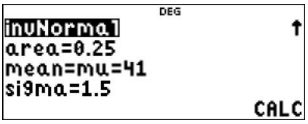
Ungefähr drei Viertel aller Brötchen haben ein Mindestgewicht von 40 g.

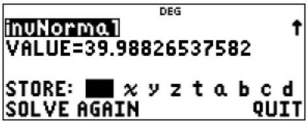


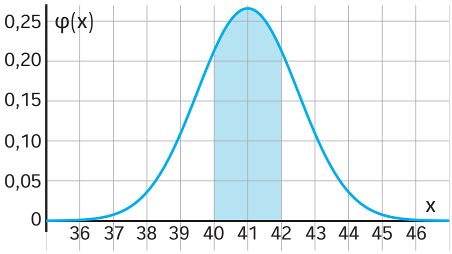


b) Unterhalb eines zum Erwartungswert symmetrisch liegenden 50 %-Intervalls liegen 25 % der Ergebnisse, d. h., mithilfe des WTR muss der zugehörige Wert k gesucht werden, sodass gilt: P(X ≤ k) = 0,25.

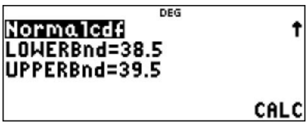
Es ergibt sich, dass ein Brötchen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 25 % ein Gewicht von weniger als 40 g hat. Daher ist das gesuchte symmetrische Intervall gleich [40 g ; 42 g].

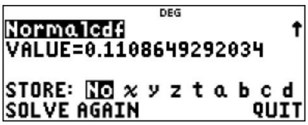




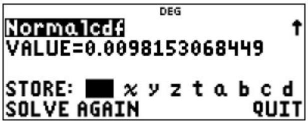


c) Bei normalverteilten Zufallsgrößen gilt für jeden Wert k, dass P(X = k) = 0.
Für die Intervallwahrscheinlichkeit zu einem Gewicht von 39 g ergibt sich P(38.5 ≤ X < 39,5) = normcdf (41,1.5,38.5,39,5) ≈ 11,1 %.

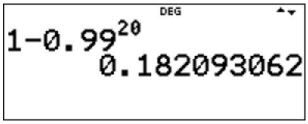




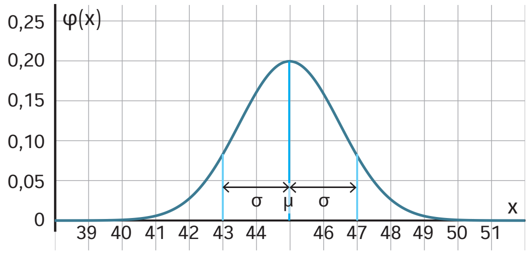
d) Zu zeigen ist: $P(X < 37{,}5\text{ g}) \approx 0{,}01$, vgl. Screenshot.



Betrachtet wird nunmehr ein 20-stufiger Bernoulli-Versuch mit Zufallsgröße Y: *Anzahl der Brötchen mit Untergewicht* (Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,01). Dann gilt:
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}9920 \approx 18{,}2\,\%$.

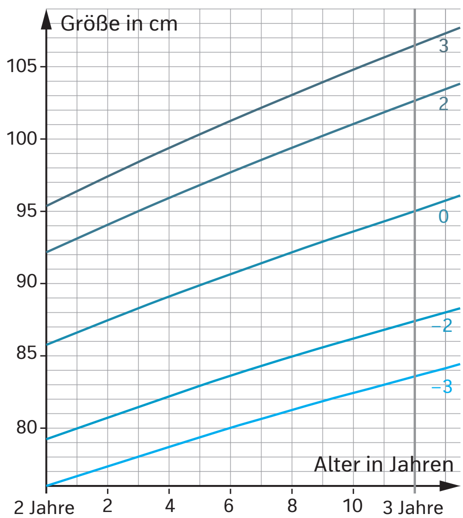


e) Der Erwartungswert μ der normalverteilten Zufallsgröße liegt beim Maximum / der Symmetrieachse der Glockenkurve, die Wendepunkte der Glockenkurve liegen bei $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$. Daher ergibt sich hier: $\mu \approx 45$ g und $\sigma \approx 2$ g.



Aufgabe 11

Die folgende Grafik zeigt einen Ausschnitt einer Auswertung der WHO bzgl. der Körpergröße von 2- bis 3-jährigen Mädchen.



a) Erläutern Sie, was in der Grafik dargestellt ist. Erklären Sie auch die Beschriftung an den Kurven (−3, −2, 0, 2, 3). An welcher Eigenschaft kann man ablesen, dass der Ansatz einer Normalverteilung bzgl. der Körperlängen gerechtfertigt ist? I7

b) Erläutern Sie, wie man aus der Grafik den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der näherungsweise normalverteilten Zufallsgröße X: *Körpergröße von 3-jährigen Mädchen* ermitteln kann. Zeigen Sie: $\mu \approx 95$ cm, $\sigma \approx 3{,}84$ cm. I7

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein 3-jähriges Mädchen größer als 100 cm? I7

d) In den Kindergärten einer Gemeinde werden die Körpergrößen der Kinder gemessen, wenn diese drei Jahre alt werden. Dabei wurden im letzten Jahr die in der Tabelle enthaltenen Anzahlen festgestellt. Vervollständigen Sie die Tabelle.*

	Körpergröße		
	unter 100 cm	mind. 100 cm	gesamt
Mädchen	112		126
Jungen		21	
gesamt	232		

Ein Kind aus dieser Stichprobe wird zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse (Angabe als Bruch genügt):
$P_{\text{Mädchen}}(\text{Körpergröße mind. 100 cm})$, $P_{\text{Körpergröße unter 100 cm}}(\text{Mädchen})$

e) Untersuchen Sie anhand der Ergebnisse der Stichprobe, ob die Merkmale Geschlecht und Körpergröße stochastisch voneinander unabhängig sind.*

Lösung

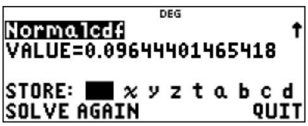
a) An der mittleren Kurve lässt sich die durchschnittliche Körpergröße der Kinder ablesen (Median), wobei 0 so viel bedeutet wie $\mu + 0 \cdot \sigma$. Entsprechend geben die anderen Kurven Auskunft über die zu den Werten $\mu - 3\sigma$, $\mu - 2\sigma$, $\mu + 2\sigma$ und $\mu + 3\sigma$ gehörenden Körpergrößen. Da die äußeren Kurven symmetrisch zu der mittleren Kurve verlaufen, kann man von einer zugrunde liegenden symmetrischen Verteilung ausgehen, für die daher ein Normalverteilungsansatz gemacht werden kann.

b) Wie in a) erläutert, gehört die mittlere Kurve zum Erwartungswert μ. Bei 3-Jährigen kann man hier den Wert $\mu = 95$ cm ablesen.

Zu $\mu + 2\sigma$ gehört die Körpergröße 102,7 cm, also $\sigma \approx \frac{7{,}7}{2} = 3{,}85$;

zu $\mu + 3\sigma$ gehört die Körpergröße 106,5 cm, also $\sigma \approx \frac{11{,}5}{3} \approx 3{,}83$ cm.

c) Mithilfe des WTR ergibt sich $P(X > 100) = \text{norm}(95, 3.84, 100, \infty) \approx 0{,}096 = 9{,}6\,\%$.



d) Die Vierfeldertafel mit den ergänzten Daten ist:

	Körpergröße		
	unter 100 cm	mind. 100 cm	gesamt
Mädchen	112	14	126
Jungen	120	21	141
gesamt	232	35	267

Die gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeiten sind

$P_{\text{Mädchen}}(\text{Körpergröße mind. 100 cm}) = \frac{14}{126} \approx 0{,}111$

$P_{\text{Körpergröße unter 100 cm}}(\text{Mädchen}) = \frac{112}{232} \approx 0{,}483$

e) Da das Produkt der Wahrscheinlichkeiten $P(\text{Mädchen}) \cdot P(\text{Körpergröße unter 100 cm}) = \frac{126}{267} \cdot \frac{232}{267} \approx 0{,}410$ ungefähr gleich der Wahrscheinlichkeit $P(\text{Mädchen} \wedge \text{Körpergröße unter 100 cm}) = \frac{112}{267} \approx 0{,}419$ ist, sind die beiden Merkmale vermutlich stochastisch voneinander unabhängig.

*) *Hinweis*: Die Themen Vierfeldertafeln und bedingte Wahrscheinlichkeiten kommen in den Abiturprüfungen bis 2022 nicht vor. Daher fehlen diese im Finale-Band für 2021. Auf den folgenden Seiten findet man Erläuterungen zu diesen Themen.

Z1 Daten aus Vierfeldertafeln als Wahrscheinlichkeiten von zweistufigen Zufallsversuchen interpretieren sowie Vierfeldertafeln zur Umkehrung von Baumdiagrammen nutzen.

In einer Vierfeldertafel wird erfasst, mit welchen relativen oder absoluten Häufigkeiten zwei Merkmalsausprägungen zweier Merkmale und auch deren Kombination auftreten.

Die Daten aus der Vierfeldertafel lassen sich auf zwei Arten in einem zweistufigen Baumdiagramm wiedergeben (auf der 1. Stufe wird das eine, auf der 2. Stufe das andere Merkmal betrachtet).
Umgekehrt lassen sich die Daten aus einem Baumdiagramm in eine Vierfeldertafel übertragen und daraus das andere („umgekehrte") Baumdiagramm entwickeln.

Beispiel 1

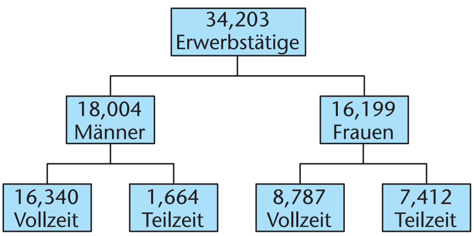
Zu einem bestimmten Stichtag waren in Deutschland durchschnittlich ca. 34,203 Mio. Personen erwerbstätig, davon 16,199 Mio. Frauen. Von diesen hatten 7,412 Mio. eine Teilzeitbeschäftigung, insgesamt gab es 9,076 Mio. teilzeitbeschäftigte Personen.
Diese Daten kann man in eine Vierfeldertafel eintragen und fehlende Daten ergänzen (Tabelle links). Die Daten der Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten kann man auch als Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten (rechts) notieren.

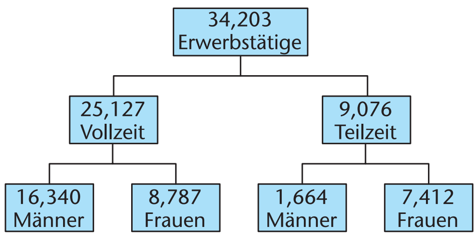
	Männer	Frauen	gesamt
Vollzeit	16,340	8,787	25,127
Teilzeit	1,664	7,412	9,076
gesamt	18,004	16,199	34,203

	Männer	Frauen	gesamt
Vollzeit	47,8 %	25,7 %	73,5 %
Teilzeit	4,9 %	21,7 %	26,5 %
gesamt	52,6 %	47,4 %	100,0 %

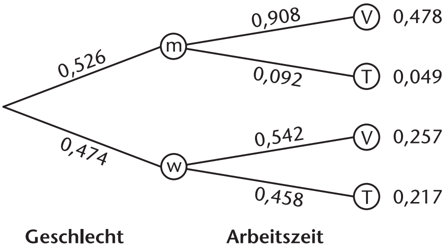
(Achtung: Bei den Prozentangaben sind rundungsbedingte Abweichungen möglich!)

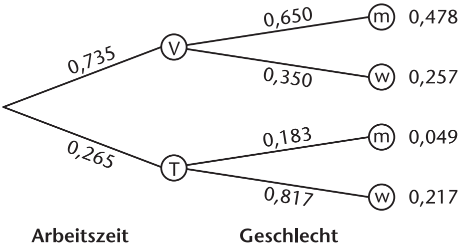
Man kann diese Daten auch hierarchisch in Form eines Organigramms darstellen. Hier sind zwei Anordnungen möglich, je nachdem, welches Merkmal man als erstes betrachtet:





Die statistischen Daten lassen sich im Sinne eines Zufallsversuchs deuten: Aus der Gesamtheit aller Erwerbstätigen wird eine Person zufällig ausgewählt. Die Organigramme werden damit zu Baumdiagrammen. Die Wahrscheinlichkeiten auf der ersten Stufe der Baumdiagramme entsprechen den Summenfeldern der obigen Vierfeldertafel, beim Baumdiagramm links sind es die Summenfelder der Spalten, beim Baumdiagramm rechts die der Zeilen. Die am Ende der Pfade stehenden Pfad-Wahrscheinlichkeiten sind gerade die Daten aus den inneren Feldern der Vierfeldertafel.





Zu den Baumdiagrammen lassen sich kurze Zeitungsartikel verfassen, die alle wesentlichen Daten enthalten, aber wegen der unterschiedlichen Reihenfolge unterschiedliche Akzente setzen:

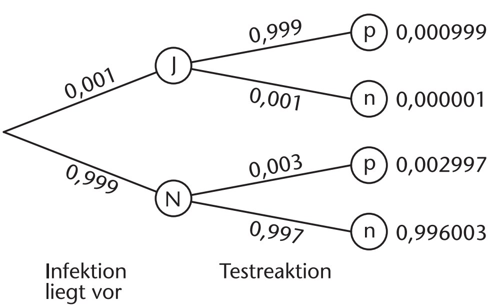
- 52,6 % der Erwerbstätigen in Deutschland sind Männer; von diesen üben 90,8 % eine Vollzeittätigkeit aus. Von den erwerbstätigen Frauen haben nur 54,2 % einen Vollzeitjob.
- 73,5 % der Erwerbstätigen in Deutschland haben einen Vollzeitjob; von diesen sind 65,0 % Männer. Teilzeitjobs sind überwiegend Frauensache: In 81,7 % der Teilzeitstellen sind Frauen beschäftigt.

Beispiel 2

Bei Infektionskrankheiten ist es wichtig, dass man schnell die Art der Krankheit erkennt, damit man sie bekämpfen kann. Hierzu führt man Schnelltests durch, die allerdings Mängel haben:
Manchmal wird eine Krankheit angezeigt, obwohl sie nicht vorliegt; gelegentlich wird eine Krankheit nicht angezeigt, obwohl sie vorhanden ist.

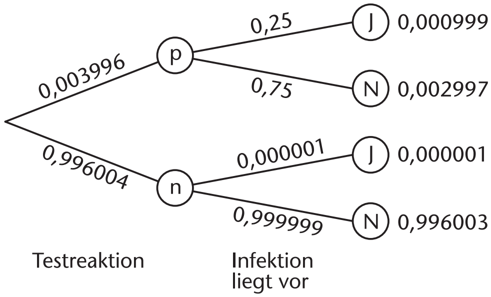
Beispiel HIV-Test:
Man kann heute davon ausgehen, dass etwa 0,1 % der Bevölkerung Deutschlands HIV-infiziert ist. Die vorliegenden Testverfahren zum Nachweis der Infektion haben mittlerweile eine hohe Sicherheit (Sensitivität): bei 99,9 % der tatsächlich Infizierten erfolgt positive Testreaktion; nur bei 0,3 % der nicht-infizierten Testpersonen wird irrtümlich eine Infektion angezeigt (Spezifität 99,7%).

Die Informationen lassen sich unmittelbar in ein Baumdiagramm übertragen:
1. Stufe: Infektion liegt vor – ja/nein, 2. Stufe: Testreaktion – positiv/negativ.
Die aus den Angaben berechneten Pfadwahrscheinlichkeiten kann man in die inneren Felder der Vierfeldertafel eintragen (rechts).



	Test positiv	Test negativ	gesamt
Infektion liegt vor	0,0999 %	0,0001 %	0,1 %
Infektion liegt nicht vor	0,2997 %	99,6003 %	99,9 %
gesamt	0,3996 %	99,6004 %	100,0 %

Von der Vierfeldertafel kommt man zum umgekehrten Baumdiagramm, indem man die Gesamtwahrscheinlichkeiten für einen positiven oder einen negativen Test aus der letzten Zeile der Vierfeldertafel entnimmt und diese auf der ersten Stufe des umgekehrten Baumdiagramms einträgt.



Die vier Pfad-Wahrscheinlichkeiten dieses Baumdiagramms können unverändert aus den inneren Feldern der Vierfeldertafel übernommen werden.
Nun können die noch fehlenden bedingten Wahrscheinlichkeiten für die unterschiedlichen Testreaktionen mithilfe der Pfadmultiplikationsregel durch Division der Pfad-Wahrscheinlichkeiten durch die Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe berechnet werden.

Zu den Informationen des umgekehrten Baumdiagramms kann man folgenden Text schreiben:
Führt man den HIV-Test mit zufällig ausgewählten Personen durch, dann wird in ungefähr 0,4% der Fälle eine positive Testreaktion zu beobachten sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positivem Testergebnis tatsächlich HIV-infiziert ist, beträgt allerdings nur ca. 25 %.
In 99,6 % der Fälle wird die Testreaktion negativ sein. Personen mit negativem Testergebnis sind nur mit vernachlässigbar geringer Wahrscheinlichkeit dennoch HIV-infiziert.

Z2 Anhand von Vierfeldertafeln die Unabhängigkeit von Merkmalen nachweisen sowie den Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen erläutern.

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen wird formal wie folgt definiert:
Wenn zwischen zwei Ereignissen E1 und E2 die Beziehung **$P(E1 \cap E2) = P(E1) \cdot P(E2)$** gilt, dann sind E1 und E2 voneinander stochastisch unabhängig.
Werden die beiden Ereignisse E1 und E2 auf zwei Stufen eines Baumdiagramms betrachtet (wobei also das Ereignis $E1 \cap E2$ einen Pfad im Baumdiagramm darstellt), dann gilt die Multiplikationsregel:
$P(E1 \cap E2) = P(E1) \cdot P_{E1}(E2)$ oder
$P(E1 \cap E2) = P(E2) \cdot P_{E2}(E1)$ bei umgekehrter Anordnung der Stufen.
Aus der Beziehung $P(E1 \cap E2) = P(E1) \cdot P(E2)$ folgt dann
$P_{E1}(E2) = P(E2)$ bzw. $P_{E2}(E1) = P(E1)$,
was inhaltlich bedeutet: E2 hängt nicht von E1 ab und E1 hängt nicht von E2 ab.
In der Darstellung eines Vorgangs mithilfe von Baumdiagrammen bedeutet dies: Wenn auf der 2. Stufe der beiden möglichen Baumdiagramme gleiche Teilbäume auftreten, dann sind die betrachteten Merkmale (und zugehörigen Ereignisse) **voneinander unabhängig**, sonst **voneinander abhängig**.
Für die Darstellung mithilfe einer Vierfeldertafel gilt: Stehen die Wahrscheinlichkeiten in den Spalten oder in den Zeilen der Vierfeldertafel im gleichen Zahlenverhältnis, dann sind die zugehörigen Merkmale voneinander unabhängig, sonst voneinander abhängig.

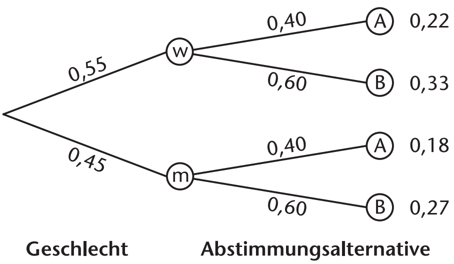
Beispiel

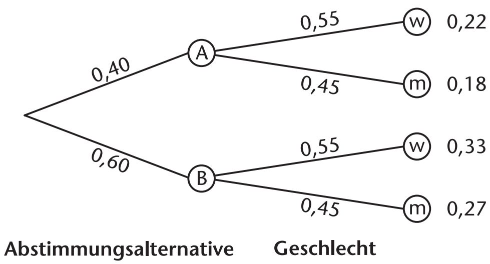
Bei einem Bürgerentscheid über den Bebauungsplan einer Gemeinde konnten sich die Bürger zwischen den Alternativen A und B entscheiden. Die Zusammensetzung der Stimmen zeigen, dass das Abstimmungsverhalten **unabhängig** vom Geschlecht, aber **abhängig** vom Alter war.

- das Abstimmungsverhalten war unabhängig vom Geschlecht:

  Die Zahlen in den Zeilen und Spalten der Vierfeldertafel stehen im gleichen Zahlenverhältnis, beispielsweise:
  $22 : 33 = 18 : 27 = 40 : 60 = 2 : 3$
  $22 : 18 = 33 : 27 = 55 : 45 = 11 : 9$
  Die Teilbäume der 2. Stufe der Baumdiagramme stimmen überein.

		Abstimmungsalternativen A	Abstimmungsalternativen B	gesamt
Geschlecht	weiblich	22 %	33 %	55 %
	männlich	18 %	27 %	45 %
gesamt		40 %	60 %	100 %





- das Abstimmungsverhalten war abhängig vom Alter:

  Die Zahlen in den Zeilen und Spalten der Vierfeldertafel stehen nicht im gleichen Zahlenverhältnis, beispielsweise:
  $16 : 30 \neq 24 : 30 \neq 40 : 60$
  $16 : 24 \neq 30 : 30 \neq 46 : 54$
  Die Teilbäume der 2. Stufe der Baumdiagramme stimmen nicht überein.

		Abstimmungsalternativen		**gesamt**
		A	**B**	
Alter	**bis 40 J.**	16 %	30 %	46 %
	über 40 J.	24 %	30 %	54 %
gesamt		40 %	60 %	100 %