westermann

Autor: Jens Peters

Unter Mitarbeit von: Thomas Mayer

Elemente der Mathematik für das Berufliche Gymnasium

Baden-Württemberg

Eingangsklasse

1. Auflage

In Teilen ist dieses Werk eine Bearbeitung von:
978-3-507-85896-1
978-3-507-85928-9
978-3-507-85935-7

Herausgegeben und bearbeitet von:
Nina Beck, Karin Benecke, Markus Benz, Julia Berlin-Bonn, Stefan Böckling, Lutz Breidert, Sybille Brinkmann, Martin Brüning, Gabriele Dybowski, Bernhard Euler, Dr. Beate Goetz, Martina Groß, Dr. Andreas Gundlach (Hrsg.), Prof. Bernd Hatz, Bodo Paul Hoffmann, Heike Homrighausen, Reinhard Kind, Werner Ladenthin (Hrsg.), Jakob Langenohl, Matthias Lösche (Hrsg.), Hanns Jürgen Morath, Kerstin Schäfer, Sigrid Schwarz, Thomas Sperlich, Friedrich Suhr (Hrsg.), Matthias Taulien, Prof. Dr. Hans-Georg Weigand, Ulrike Willms, Hanna Zeile

Bestellnummer 225450

Die in diesem Produkt gemachten Angaben zu Unternehmen (Namen, Internet- und E-Mail-Adressen, Handelsregistereintragungen, Bankverbindungen, Steuer-, Telefon- und Faxnummern und alle weiteren Angaben) sind i. d. R. fiktiv, d. h., sie stehen in keinem Zusammenhang mit einem real existierenden Unternehmen in der dargestellten oder einer ähnlichen Form. Dies gilt auch für alle Kunden, Lieferanten und sonstigen Geschäftspartner der Unternehmen wie z. B. Kreditinstitute, Versicherungsunternehmen und andere Dienstleistungsunternehmen. Ausschließlich zum Zwecke der Authentizität werden die Namen real existierender Unternehmen und z. B. im Fall von Kreditinstituten auch deren IBANs und BICs verwendet.

Materialien für Lehrerinnen und Lehrer

Lösungen: 978-3-14-225454-8
Lösungen Download: 978-3-14-225452-4

BiBox Einzellizenz für Lehrer/-innen (Dauerlizenz) 978-3-14-225462-3
BiBox Kollegiumslizenz für Lehrer/-innen (Dauerlizenz) 978-3-14-225464-7
BiBox Kollegiumslizenz für Lehrer/-innen (1 Schuljahr) 978-3-14-107822-0

Materialien für Schülerinnen und Schüler

BiBox Einzellizenz für Schüler/-innen (1 Schuljahr) 978-3-14-225456-2

westermann GRUPPE

© 2021 Bildungsverlag EINS GmbH, Ettore-Bugatti-Straße 6–14, 51149 Köln, www.westermann.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen bzw. vertraglich zugestandenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Nähere Informationen zur vertraglich gestatteten Anzahl von Kopien finden Sie auf www.schulbuchkopie.de.

Für Verweise (Links) auf Internet-Adressen gilt folgender Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich. Sollten Sie daher auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail davon in Kenntnis zu setzen, damit beim Nachdruck der Verweis gelöscht wird.

Druck und Bindung: Westermann Druck GmbH, Georg-Westermann-Allee 66, 38104 Braunschweig

ISBN 978-3-14-225450-0

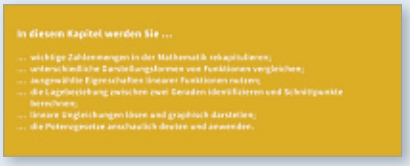
Hinweise zur Arbeit mit diesem Buch

Jedes Kapitel beginnt mit einem einleitenden Beispiel, welches selbstständig von Ihnen bearbeitet werden kann. Sie erhalten auf diese Weise exemplarisch einen Kurzüberblick zu möglichen Inhalten des Kapitels.

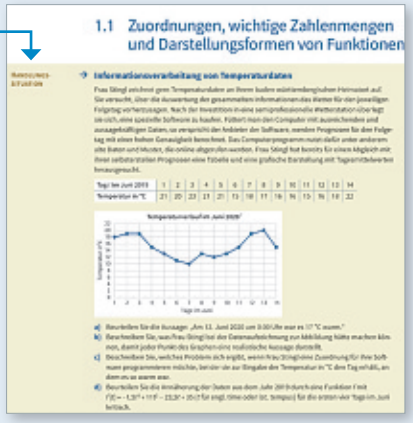
Ergänzende Hinweise für Lehrerinnen und Lehrer

- Das einleitende Beispiel ist kurz und verständlich beschrieben. Die Aufgabenstellung fordert zur selbstständigen Problemlösung auf und fördert die Motivation.

Nach dem einleitenden Beispiel erhalten Sie einen Überblick, was in dem Kapitel thematisch behandelt wird.



Jeder Abschnitt beginnt mit einer **Handlungssituation**, mit der lebensnahe Problemstellungen mathematisch gelöst werden. Mithilfe der Lösung können Sie sich den Inhalt selbstständig erarbeiten, nacharbeiten oder die Problemlösestrategien herausarbeiten.

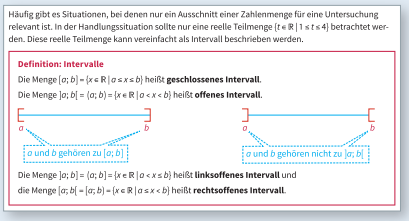


- Problemlösekompetenz nimmt bei der **Handlungssituation** eine zentrale Rolle ein.
Neben einer besseren Vorstellungsaktivierung besteht zudem die Möglichkeit außermathematische Themen mit innermathematischen zu vernetzen.

- Die **Informationen** sind verständlich geschrieben und gegebenenfalls mit Abbildungen versehen.

- Der rote Faden orientiert sich an der zuvor bearbeiteten Handlungssituation und trägt somit zum besseren Verständnis bei.

- Sie können gut zum späteren Nacharbeiten, z. B. zur Vorbereitung einer Klausur, genutzt werden.



Häufig gibt es Situationen, bei denen nur ein Ausschnitt einer Zahlenmenge für eine Untersuchung relevant ist. In der Handlungssituation sollte nur eine reelle Teilmenge $\{t \in \mathbb{R} \mid 1 \leq t \leq 4\}$ betrachtet werden. Diese reelle Teilmenge kann vereinfacht als Intervall beschrieben werden.

Definition: Intervalle

Die Menge $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ heißt **geschlossenes Intervall**.

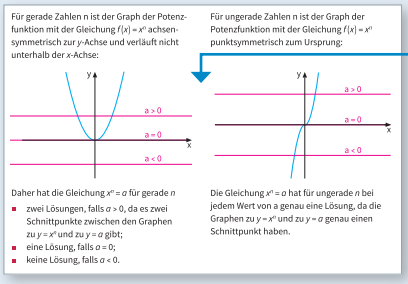
Die Menge $]a; b[= (a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ heißt **offenes Intervall**.

a und b gehören zu $[a; b]$

a und b gehören nicht zu $]a; b[$

Die Menge $[a; b) = (a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ heißt **linksoffenes Intervall** und die Menge $(a; b] = [a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ heißt **rechtsoffenes Intervall**.

Das neu Gelernte wird allgemein in **Informationen** zusammengefasst. Querverweise zur Handlungssituation stellen zu den allgemein verfassten Definitionen, Sätzen oder Merksätzen einen Realbezug her.



Für gerade Zahlen n ist der Graph der Potenzfunktion mit der Gleichung $f(x) = x^n$ achsensymmetrisch zur y-Achse und verläuft nicht unterhalb der x-Achse:

Für ungerade Zahlen n ist der Graph der Potenzfunktion mit der Gleichung $f(x) = x^n$ punktsymmetrisch zum Ursprung:

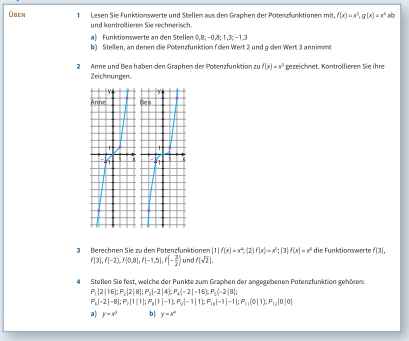
Daher hat die Gleichung $x^n = a$ für gerade n

- zwei Lösungen, falls $a > 0$, da es zwei Schnittpunkte zwischen den Graphen zu $y = x^n$ und zu $y = a$ gibt;
- eine Lösung, falls $a = 0$;
- keine Lösung, falls $a < 0$.

Die Gleichung $x^n = a$ hat für ungerade n bei jedem Wert von a genau eine Lösung, da die Graphen zu $y = x^n$ und zu $y = a$ genau einen Schnittpunkt haben.

Viele Abbildungen verdeutlichen den mathematischen Sachverhalt auf verständliche Art.

- Die **Übungsaufgaben** werden in drei Niveaustufen unterschieden:
  - **Üben** zur Festigung des Gelernten,
  - **Vertiefen** zur Vernetzung des Gelernten,
  - **Herausfordern** zur Förderung der Selbstständigkeit und Problemlösefähigkeit.



Üben

1 Lesen Sie Funktionswerte und Stellen aus den Graphen der Potenzfunktionen mit, $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ ab und kontrollieren Sie rechnerisch.

a) Funktionswerte an den Stellen 0,8; −0,8; 1,3; −1,3

b) Stellen, an denen die Potenzfunktion f den Wert 2 und g den Wert 3 annimmt

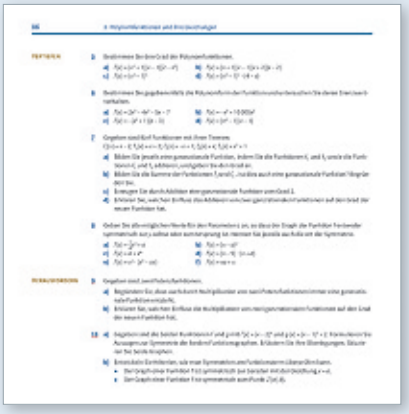
2 Anne und Bea haben den Graphen der Potenzfunktion zu $f(x) = x^3$ gezeichnet. Kontrollieren Sie ihre Zeichnungen.

Anne Bea

3 Berechnen Sie zu den Potenzfunktionen (1) $f(x) = x^6$; (2) $f(x) = x^5$; (3) $f(x) = x^4$ die Funktionswerte $f(3)$, $f(3)$, $f(-2)$, $f(0{,}8)$, $f(-1{,}5)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ und $f(\sqrt{2})$.

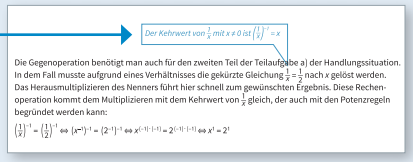
4 Stellen Sie fest, welche der Punkte zum Graphen der angegebenen Potenzfunktion gehören:
$P_1(2\,|\,16)$; $P_2(2\,|\,8)$; $P_3(-2\,|\,4)$; $P_4(-2\,|\,-16)$; $P_5(-2\,|\,8)$;
$P_6(-2\,|\,-8)$; $P_7(1\,|\,1)$; $P_8(1\,|\,-1)$; $P_9(-1\,|\,1)$; $P_{10}(-1\,|\,-1)$; $P_{11}(0\,|\,1)$; $P_{12}(0\,|\,0)$

a) $y = x^3$ b) $y = x^4$



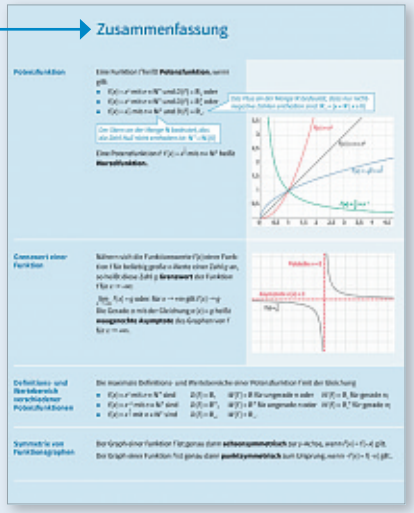
Die **Übungsaufgaben** bieten Ihnen vielfältige Möglichkeiten, das neu Gelernte zu festigen und anzuwenden.

Blaue Informationskästen geben an geeigneten Stellen Hinweise oder Tipps.



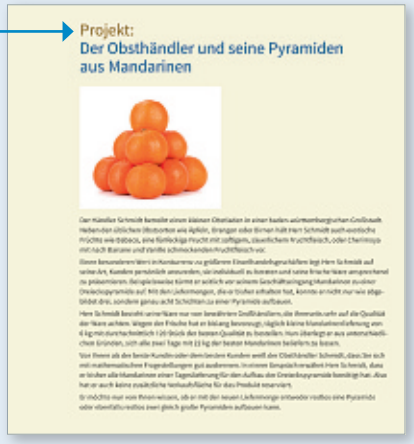
- Es gibt Tipps, die zu konkreten Handlungen auffordern.

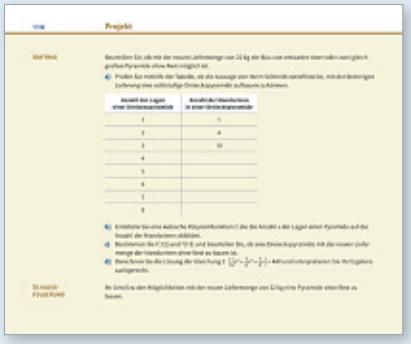
Sind alle Inhalte eines Kapitels bearbeitet, wird in Kurzform eine **Zusammenfassung** gegeben. Jeder Satz oder Merksatz sowie jede Definition wird namentlich aufgeführt, im Detail beschrieben und gegebenenfalls durch eine Abbildung veranschaulicht.



- Die **Zusammenfassung** eignet sich für eine Formelsammlung.

Nach jeder Zusammenfassung können Sie Ihr gelerntes Fachwissen unter Beweis stellen. Mithilfe einer weiteren realistischen Problemstellung sind Sie bei einem **Projekt** aufgefordert, kreativ, interaktiv und zielorientiert zu arbeiten.



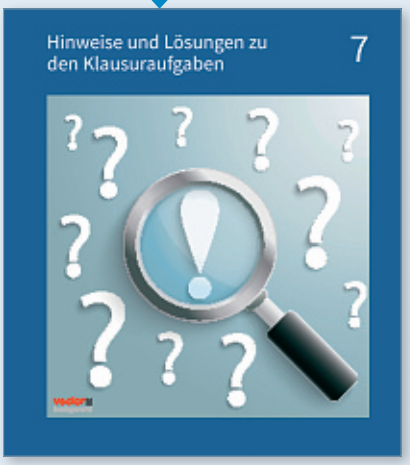


- Das **Projekt** beginnt mit einer Situationsbeschreibung.
Durch den anschließenden **Auftrag** werden Lernende aufgefordert, ein größeres Problem zu lösen. Dies kann kleinschrittig durch nachfolgende Teilaufgaben erfolgen.
In der **Schlussfolgerung** sollen die Teillösungen zu einem Ganzen zusammengefasst werden.

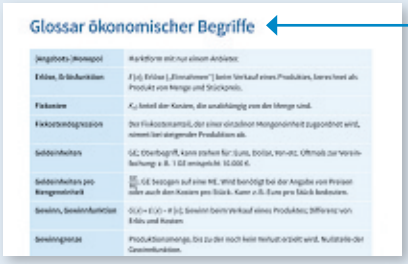
- Die Dauer der Klausur bei dem **Klausurtraining** stellt eine Empfehlung dar.

Am Ende eines Kapitels bietet Ihnen das **Klausurtraining** einfache bis komplexere Aufgabenstellungen zur Vorbereitung auf eine Prüfung.

- Die **Hinweise und Lösungen zu den Klausuraufgaben** beschreiben mögliche Lösungswege. Sie sind nicht immer zwingend einzuhalten. Individuelle Schülerlösungen sind fallbezogen zu beurteilen.



Im letzten Kapitel des Buches können Sie **Hinweise** zu den Klausuren erhalten. Auf gesonderten Seiten wird die **Lösung** jeder Klausur ausführlich und verständlich beschrieben.



Am Ende des Buches können Sie beim **Glossar ökonomischer Begriffe** die im Buch verwendeten wirtschaftlichen Begriffe nachschlagen.

Zum Einsatz digitaler Werkzeuge

Die Handlungssituationen sowie viele Übungsaufgaben sind so konzipiert, dass die Lernenden bei der Bearbeitung dieser Problemstellungen digitale Werkzeuge nutzen sollten. Insbesondere der Betrachtung im $\mathbb{R}^3$ ist es geschuldet, dass der Autor auf digitale Mathematikwerkzeuge wie GeoGebra zurückgegriffen hat. Die unkomplizierte Handhabung mit Graphen von Polynomfunktionen mit einem Parameter (Schar von Polynomfunktionen) stellen einmal mehr den Vorteil eines digitalen Mathematikwerkzeuges dar. Auf einen symbolischen Hinweis für ihre Nutzung wurde bewusst verzichtet, da eine Nutzungsmöglichkeit häufig gegeben ist.

Symbol, das in diesem Buch verwendet wird:

Gruppenarbeit

Inhaltsverzeichnis

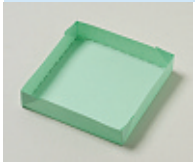
1 Grundlagen

1.1 Zuordnungen, wichtige Zahlenmengen und Darstellungsformen von Funktionen 10
1.2 Lineare Funktionen und Geraden 17
1.3 Potenzen – ein Hoch auf Zahlen 26
Zusammenfassung 31
Projekt: Den Definitionsbereich Kopf stehen lassen 35
Klausurtraining 37

2 Potenzfunktionen und ihre Gleichungen

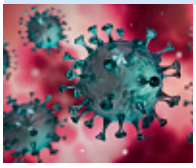
2.1 Potenzfunktionen und ihre charakteristischen Eigenschaften 39
2.2 Besondere Eigenschaften ausgewählter Potenzfunktionen 46
2.3 Transformationen von Potenzfunktionen 56
2.4 Lösen von Potenzgleichungen 64
Zusammenfassung 69
Projekt: Splines für einen VW-Käfer ermitteln 74
Klausurtraining 76

3 Polynomfunktionen und ihre Gleichungen



3.1 Polynomfunktionen und ihre Darstellungsformen 78
3.2 Funktionstermermittlung 86
3.3 Lösungen von Polynomgleichungen 93
3.4 Einfache Optimierungsprobleme 102
Zusammenfassung 107
Projekt: Der Obsthändler und seine Pyramiden aus Mandarinen 112
Klausurtraining 114

4 Exponentialfunktionen und ihre Gleichungen



4.1 Exponentialfunktionen 117
4.2 Von der nominellen zur effektiven Wachstumsrate und umgekehrt 126
4.3 Beschränkte Abnahme 130
4.4 Beschränkte Zunahme – Spiegelungen von Funktionsgraphen 135
4.5 Gleichungen mit exponentiellem Anteil 141
Zusammenfassung 147
Projekt: Alkoholfreies Bier 151
Klausurtraining 153

5 Differenzialrechnung

5.1 Grafisches Differenzieren 156
5.2 Berechnung der momentanen Änderungsrate 163
5.3 Funktionaler Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer momentanen Änderungsrate 169
Zusammenfassung 177
Projekt: Das autonome Fahren 180
Klausurtraining 182

6 Vektorielle Geometrie

6.1 Raumanschauung und Koordinatisierung im $\mathbb{R}^3$ 184
6.2 Grundlegende Rechenoperationen mit Vektoren 193
6.3 Länge eines Vektors und Teilungsverhältnisse 200
6.4 Das Skalarprodukt 207
Zusammenfassung 214
Projekt: Tunnel 219
Klausurtraining 221

7 Hinweise und Lösungen zu den Klausuraufgaben

7.1 Hinweise 223
7.2 Lösungen 226

Anhang

Glossar ökonomischer Begriffe 236
Stichwortverzeichnis 238
Bildquellenverzeichnis 240

Grundlagen

1

Die Verschlüsselung von Daten spielt in der Informationsverarbeitung eine wesentliche Rolle. Komplizierte Rechenverfahren und Zusammenhänge werden genutzt, um beispielsweise den Mailverkehr zu sichern. Realen Ansprüchen könnte das folgende Verfahren zwar nicht standhalten, zeigt aber wichtige Elemente einer Verschlüsselung.

1. Jeder Buchstabe erhält eine Kennziffer nach der Tabelle.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

2. Multiplizieren Sie die Kennziffer eines Buchstabens mit 4, dividieren Sie anschließend das Produkt durch 26 und nehmen Sie den Rest der Division als neue Zuordnung für den Buchstaben.

Beispiel: $K \rightarrow 11$; $4 \cdot 11 = 44$; $44 : 26 = 1$ Rest 18 somit folgt: $K \rightarrow 18$

a) Beschreiben Sie die Zuordnungen, die in dem Verschlüsselungsverfahren Anwendung finden.

b) Verschlüsseln Sie auf die beschriebene Art ein Wort Ihrer Wahl, welches die Buchstaben *E* und *R* enthalten sollte. Geben Sie anschließend Ihr verschlüsseltes Wort nach rechts weiter.

c) Entschlüsseln Sie das erhaltene Wort. Beschreiben Sie, welche Problematik sich bei dem beschriebenen Verfahren ergibt.

d) Verändern Sie das beschriebene Verschlüsselungsverfahren, sodass es das Problem aus Teilaufgabe c) nicht gibt.

In diesem Kapitel werden Sie …

- … wichtige Zahlenmengen in der Mathematik rekapitulieren;
- … unterschiedliche Darstellungsformen von Funktionen vergleichen;
- … ausgewählte Eigenschaften linearer Funktionen nutzen;
- … die Lagebeziehung zwischen zwei Geraden identifizieren und Schnittpunkte berechnen;
- … lineare Ungleichungen lösen und graphisch darstellen;
- … die Potenzgesetze anschaulich deuten und anwenden.

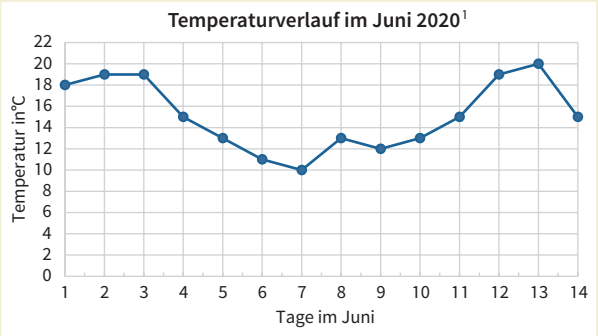
1.1 Zuordnungen, wichtige Zahlenmengen und Darstellungsformen von Funktionen

HANDLUNGS-SITUATION

→ Informationsverarbeitung von Temperaturdaten

Frau Stingl zeichnet gern Temperaturdaten an ihrem baden-württembergischen Heimatort auf. Sie versucht, über die Auswertung der gesammelten Informationen das Wetter für den jeweiligen Folgetag vorherzusagen. Nach der Investition in eine semiprofessionelle Wetterstation überlegt sie sich, eine spezielle Software zu kaufen. Füttert man den Computer mit ausreichenden und aussagekräftigen Daten, so verspricht der Anbieter der Software, werden Prognosen für den Folgetag mit einer hohen Genauigkeit berechnet. Das Computerprogramm nutzt dafür unter anderem alte Daten und Muster, die online abgerufen werden. Frau Stingl hat bereits für einen Abgleich mit ihren selbsterstellen Prognosen eine Tabelle und eine grafische Darstellung mit Tagesmittelwerten herausgesucht.

Tag t im Juni 2019	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Temperatur in °C	21	20	23	21	21	15	18	17	16	16	15	16	18	22



a) Beurteilen Sie die Aussage: „Am 12. Juni 2020 um 0:00 Uhr war es 17 °C warm."

b) Beschreiben Sie, was Frau Stingl bei der Datenaufzeichnung zur Abbildung hätte machen können, damit jeder Punkt des Graphen eine realistische Aussage darstellt.

c) Beschreiben Sie, welches Problem sich ergibt, wenn Frau Stingl eine Zuordnung für ihre Software programmieren möchte, bei der sie zur Eingabe der Temperatur in °C den Tag erhält, an dem es so warm war.

d) Beurteilen Sie die Annäherung der Daten aus dem Jahr 2019 durch eine Funktion f mit $f(t) = -1{,}5t^3 + 11t^2 - 23{,}5t + 35$ (t für engl. time oder lat. tempus) für die ersten vier Tage im Juni kritisch.

LÖSUNG

a) Die Aussage: „Am 12. Juni 2020 um 0:00 Uhr war es 17 °C warm" ist falsch, denn es wurden Tagesmittelwerte aufgezeichnet. Zwar legt der Kurvenverlauf für Mitternacht eine Temperatur von 17°C nahe, aber tatsächlich liegt die Nachttemperatur unter dem Tagesmittelwert.
Die Zuordnung Tag → Durchschnittstemperatur in °C ist eine Aufnahme, die in der Graphik nur durch Punkte repräsentiert wird. Der Polygonzug durch die Punkte entspricht nicht den realistischen Temperaturen zu den jeweiligen Zeitpunkten.

Würde man die Menge der Zeitpunkte $t \in \{1; 2; 3; \ldots; 13; 14\}$ auf $\{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 14\}$ ändern, müsste der Temperaturverlauf für jeden Moment aufgenommen und dargestellt werden. Der Kurvenverlauf wäre mit deutlich mehr Schwankungen versehen, da nachts die Temperatur sinkt und tagsüber wieder steigt.

1 Die Temperatur ergibt sich aus dem Tagesdurchschnitt.

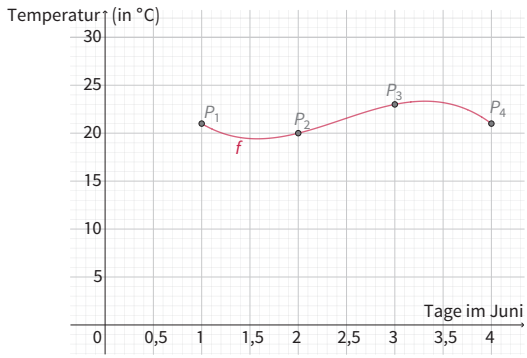
b) Frau Stingl hätte den Temperaturverlauf in Abhängigkeit der Zeit t für jeden Moment („24–7“) aufzeichnen müssen. Die Menge, die angibt, welche Zeitpunkte möglich sind, hätte sich dann auch auf $\{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 14\}$ geändert. Dann hätte Frau Stingl beispielsweise für den Zeitpunkt $t = 3{,}5$ eine realistische Temperatur ermitteln können.

c) Frau Stingl möchte eine Zuordnung programmieren, bei der die Temperatur in °C auf die Tage abgebildet werden. In dem Fall ergibt sich aber das Problem, dass beispielsweise im Jahr 2020 eine Temperatur von 19°C auf den 02. Juni, 03. Juni und den 12. Juni abgebildet werden müsste. Das Computerprogramm müsste dann mehr als ein Datum ausgeben, was für Frau Stingl zu erheblichen Problemen beim Programmieren führen kann. Wenn bei der durch Eingabe eines Wertes mehrere Ergebnisse möglich sind, müssen Routinen programmiert werden, mit denen überprüft wird, ob es noch weitere Lösungen gibt. Deutlich einfacher ist es, etwas zu programmieren, bei der es durch Eingabe eines unabhängigen Wertes nur ein (abhängiges) Ergebnis gibt.

d) Tatsächlich können mithilfe der Funktion f mit $f(t) = -1{,}5t^3 + 11t^2 - 23{,}5t + 35$ vier Tagesmittelwerte zutreffend vorhergesagt werden.

Tag t im Juni 2020	1	2	3	4
Temperatur in °C	21	20	23	21
Temperatur nach f	21	20	23	21

Bei Betrachtung des Graphen von f auf $\{t \in \mathbb{R} \mid 1 \leq t \leq 4\}$ fällt auf, dass für die „Zwischenwerte“ bezüglich der Zeit ein realistisches Bild nicht unbedingt gegeben ist.



Fragwürdig ist beispielsweise, welche Aussage durch die Funktionswerte für $3 < t < 4$ getroffen werden können. Geht man davon aus, dass die Funktion f die Temperatur des jeweiligen Zeitpunktes abbildet, würde beispielsweise eine nächtliche Abkühlung nicht berücksichtigt werden. Zudem müssten die Funktionswerte von f so ausgewogen sein, dass sich für den Zeitraum eines Tages der Temperaturdurchschnitt aus der Tabelle ergibt.

Verändert man allerdings die Menge, durch der die möglichen Zeitwerte definiert sind, auf $\{1; 2; 3; 4\}$, ist die Funktion f eine gute Annäherung der Daten für die ersten vier Tage im Juni 2019.

INFORMATION

In der Handlungssituation *Informationsverarbeitung von Temperaturdaten* wurde deutlich, wie wichtig für eine Zuordnung die Menge der unabhängigen Größe (x- oder t-Wert) ist. Stellt man die dargestellte Zuordnung nur für Zeitpunkte der Temperaturmessung aus der Menge $\{1; 2; 3; \ldots; 13; 14\}$ dar, darf man nur einzelne, „diskrete“ Punkte in einer Abbildung wiederfinden, die nicht durch eine Linie verbunden sind.

Möchte man aber für den Temperaturverlauf eine durchgängige Kurve zeichnen, benötigt man eine „durchgängige“ Zahlenmenge $\{t \in \mathbb{R} \mid 1 \leq t \leq 14\}$, damit die unabhängige Variable t Werte wie 2,5 oder $\sqrt{2}$ annehmen kann.

Die Menge $\{1; 2; 3; \ldots; 13; 14\}$ ist eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Sie ist aber auch Teilmenge der ganzen, der rationalen und der reellen Zahlen.

Ein in der Mathematik wichtiges Beispiel für eine mehrdeutige Zuordnung ist die y-Achse und all ihre Parallelen. So würde das für Frau Stingl bedeuten, dass sie beispielsweise zum Zeitpunkt $t = 1$ unendlich viele Temperaturdaten hätte. Folglich ist eine zur y-Achse parallele Gerade nicht als Funktion darzustellen.

Merke: y-Achse und ihre Parallelen

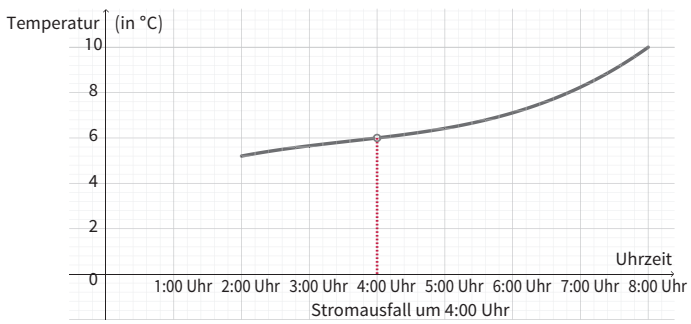
Geraden, die durch eine Gleichung der Form $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ dargestellt werden, sind keine Funktionen.

Werden Situationen modelliert, können mathematisch oder realistisch bedingte Lücken im Definitionsbereich auftreten. Solch eine Lücke könnte sich beispielsweise bei der Temperaturaufnahme von Frau Stingl ergeben, wenn bei einem Stromausfall keine Daten aufgezeichnet werden – es fehlen die Stelle t und der Messwert. Im mathematischen Sinne ist der Zeitpunkt t des Stromausfalls eine Definitionslücke.

Definition: Definitionslücke

Für eine Funktion f, die in $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ definiert ist, heißt die Stelle $x = x_0$ **Definitionslücke**.

- Gilt $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, so heißt $x = x_0$ **hebbare Definitionslücke** von f.
- Eine Definitionslücke $x = x_0$ heißt **Polstelle** einer gebrochen-rationalen Funktion f,
  - wenn für $x < x_0$ gilt: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ oder
  - wenn für $x > x_0$ gilt: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$



Bei dem Stromausfall liegt eine hebbare Definitionslücke vor. Der Stromausfall könnte durch Baumaßnahmen an beliebigen Zeitpunkten eintreten, aber die Temperatur durch eine rechts- und linksseitige Annäherung bestimmt werden.

In der nächsten Abbildung ist eine nicht hebbare Definitionslücke zu sehen. Die Abbildung zeigt eine Polstelle, an der die Funktionswerte (y-Werte) bei Annäherung entweder ins positiv oder negativ Unendliche wachsen.

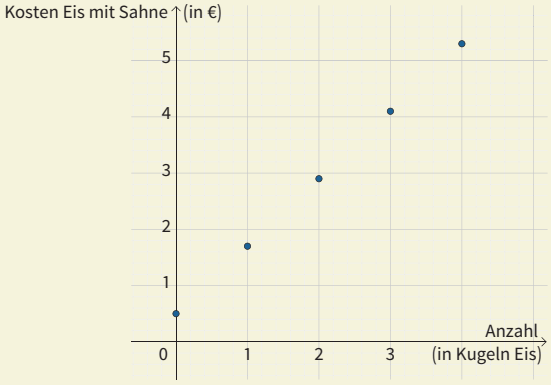
Beispielhaft seien für eine Polstelle die Fixkosten einer Werft betrachtet. Der Bootsbau verursacht monatlich anfallende Fixkosten von 10000 Euro. Die Funktion k_{fix} mit $k_{fix}(x) = \frac{10\,000}{x}$ bildet die Fixkosten pro Boot (Stückfixkosten k_{fix}) abhängig von den monatlich gebauten Booten x ab.

Projekt:
Den Definitionsbereich Kopf stehen lassen

Im Folgenden sind mehrere Situationen beschrieben, aus denen eine Funktion hervorgeht. Sie sollen den Definitionsbereich der geschilderten Funktion abändern und daraufhin die Situation neu anpassen.

Situation 1

In einem Eiscafé kostet die Kugel Eis 1,20 €, möchte man noch eine Portion Sahne, so sind 0,50€ zusätzlich zu entrichten.



Situation 2

Die erste Spritztour mit seinem neuen Auto unternahm Herr Brösel vor zwei Tagen. Eine App zeichnete die Geschwindigkeit v seines Autos in km/h zum Zeitpunkt t in Minuten auf.

Situation 3

In einem Fachgeschäft für Käsespezialitäten wird ein besonderer Chili-Käse für 10 Euro pro Pfund[6] verkauft. Die Funktion K, die in Abhängigkeit der Menge x in kg die Kosten in Euro abbildet ist $K(x) = 20x$. Der Käse ist nicht abgepackt und kann in beliebigen Größen zugeschnitten werden.

AUFTRAG

Stellen Sie die geschilderte Situation der neuen Situation gegenüber, die durch die folgende Veränderung des Definitionsbereichs entsteht. Dazu:

a) Bestimmen Sie für die beschriebenen Situationen die Definitionsmenge der jeweiligen Situation.

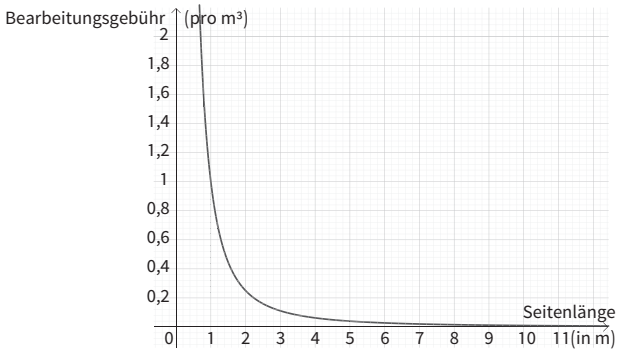
b) Falls der Definitionsbereich der jeweiligen Funktion f durch $D(f) = \mathbb{N}$ gegeben ist, ersetzen Sie sie durch $D(f) = \mathbb{R}$. Im Fall $D(f) = \mathbb{R}$ soll dieser gegen $D(f) = \mathbb{N}$ getauscht werden. Beschreiben Sie nun eine dem geänderten Definitionsbereich angepasste neue Situation.

SCHLUSS-FOLGERUNG

Ihr Vergleich zwischen der alten und der neuen Situation.

6 alte Gewichtseinheit: 1 Pfund = 500g

Man kann den Verlauf des Graphen der Funktion b_A für $x \to \infty$ erahnen, weil er sich immer mehr an die x-Achse „schmiegt“.



INFORMATION

Bei der Handlungssituation *Eine Übersicht über die Maßzahlen eines Paketwürfels* fällt auf, dass die Terme der Funktionen A und V Ähnlichkeiten aufweisen. Sie folgen aus den Potenzgesetzen, demnach sich die anderen Funktionen A^{-1}, V^{-1} und b_A nur in der Hochzahl unterscheiden. Sie gehören allesamt einer Funktionenklasse an, die an dieser Stelle nur für $x \in \mathbb{R}_+^*$ betrachtet werden soll.

Definition: Potenzfunktion

Eine Funktion f heißt **Potenzfunktion**, wenn gilt:

- $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ und $D(f) = \mathbb{R}_+$ oder
- $f(x) = x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ und $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ oder
- $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ und $D(f) = \mathbb{R}_+$.

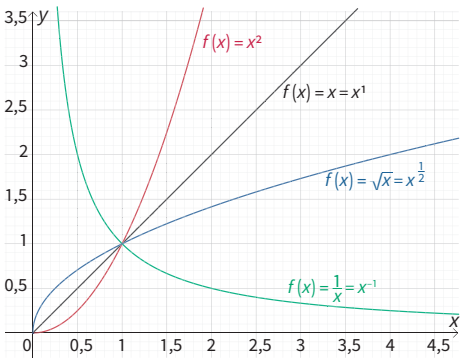
Das Plus an der Menge $\mathbb{R}$ bedeutet, dass nur nicht-negative Zahlen enthalten sind: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Der Stern an der Menge $\mathbb{N}$ bedeutet, dass die Zahl Null nicht enthalten ist: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Eine Potenzfunktion f: $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ heißt **Wurzelfunktion.**

Die Potenzregeln legen den Namen Wurzelfunktion für Funktionen der Art $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ nahe, denn es gilt: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Vergleichen Sie Kapitel 1 auf Seite 28



Graphen von exemplarischen Potenzfunktionen

Erweitert man das Zahlenverständnis um den Begriff **unendlich** mit dem Zeichen ∞, so wird deutlich, dass es bei Rechenoperationen zu Schwierigkeiten kommen kann; zum Beispiel ist das Doppelte von ∞ nicht $2 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ ist nicht zwangsläufig null.

Merke: Strategie zum Lösen einer Wurzelgleichung

(1) Formen Sie die Gleichung zuerst so um, dass der Wurzelterm allein auf einer Seite der Gleichung steht.

(2) Quadrieren Sie beide Seiten der Gleichung, um den Wurzelterm zu beseitigen.

(3) Lösen Sie die Gleichung. Führen Sie mit allen Lösungen eine Probe durch, da das Quadrieren einer Gleichung keine Äquivalenzumformung ist und sich so Zahlen als mögliche Lösungen ergeben können, die aber die Ausgangsgleichung nicht erfüllen.

(4) Geben Sie die Lösungen der Wurzelgleichung unter Beachtung der einschränkenden Bedingung an.

Üben

1 Versuchen Sie, grafisch Näherungswerte für die Lösungen der Gleichungen zu ermitteln. Geben Sie auch die exakten Lösungen an: $x^3 = 2 \Rightarrow x \approx 1{,}26;\ x = \sqrt[3]{2}$

a) $x^3 = 2$; $x^3 = -3$; $x^3 = 0$ **b)** $x^4 = 2$; $x^4 = -3$; $x^4 = 0$ **c)** $x^5 = 2$; $x^5 = -3$; $x^5 = 0$ **d)** $x^6 = 2$; $x^6 = -3$; $x^6 = 0$

2 Bestimme die Lösungen der Gleichungen im Kopf.

a) $x^3 = 216$ **b)** $x^3 = -1\,000$ **c)** $x^5 = 100\,000$ **d)** $x^6 = 64$ **e)** $x^7 = -1$
f) $-x^5 = 32$ **g)** $8x^3 = -1$ **h)** $x^4 - 81 = 0$ **i)** $5x^4 = 405$ **j)** $6x^6 = 0$

3 Nennen Sie je eine Gleichung der Form $x^n = b$, die die gegebene Lösungen hat.

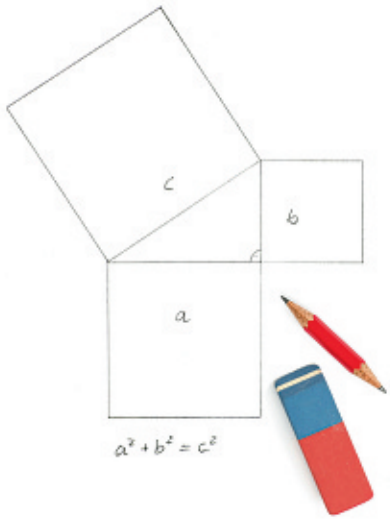
a) $-3; 3$ **b)** -5 **c)** 0
d) keine Lösung **e)** 1 **f)** $-1; 1$

4 Bestimmen Sie die Lösungen der Wurzelgleichung.

a) $\sqrt{x+1} = 5$ **b)** $\sqrt{x} + 1 = 21$ **c)** $\sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{x^2 + 8}$ **d)** $\sqrt{x+5} = x + 1$
e) $x = \sqrt{2x^2 - 1}$ **f)** $\sqrt{x-4} - 5 = 0$ **g)** $\sqrt{\frac{1}{2}x - 4} = \sqrt{2 - x}$ **h)** $6\sqrt{3x^2 + 1} = 42$

Vertiefen

5 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC beträgt das Hypotenusenquadrat 100 und die Länge einer Kathete 6 cm. Berechnen Sie die Länge der zweiten Kathete und machen Sie die Probe.



6 Bestimmen Sie die Lösungen. Machen Sie die Probe.

a) $x^4 = 12$ **b)** $x^7 = \frac{1}{3}$ **c)** $3x^3 + 18 = 0$ **d)** $3x^4 + 48 = 2$

e) $-6x^5 + 192 = 0$ **f)** $(x+1)^3 = 64$ **g)** $(x-4)^3 - 27 = 0$ **h)** $3(x-10)^4 = 12$

7 Welche Fehler wurden hier begangen? Erklären und korrigieren Sie.

a) $x^5 = -7;\ L = \left\{(-7)^{\frac{1}{6}}\right\}$ **b)** $x^4 = 1{,}7;\ L = \left\{1{,}7^{\frac{1}{4}}\right\}$

c) $2x^3 - 8 = 10;\ L = \left\{9^{\frac{1}{3}}; -9^{\frac{1}{3}}\right\}$ **d)** $(x-5)^5 = -1\,024$; keine Lösungen

8 Gegeben sind die Gleichungen:

(1) $x^2 = a$ (2) $x^3 = a$ (3) $x^4 = a$ (4) $x^5 = a$

a) Setzen Sie $a = 64$ und bestimmen Sie die Lösung zu jeder Gleichung.

b) Setzen Sie $a = -1$und bestimmen Sie die Lösung zu jeder Gleichung.

c) Stellen Sie für jede Gleichung fest, für welche Werte von a keine, genau eine oder zwei Lösungen existieren.

HERAUSFORDERN

9 **a)** Bestimmen Sie Bedingungen für die Variable k, sodass die Gleichung $x^4 = 81 + k$ genau eine, keine oder zwei Lösungen hat.

b) Verändere die Gleichung $4x^4 + 20 = -4$, sodass die entstandene Gleichung genau eine Lösung hat.

10 Lösen Sie die Wurzelgleichung.

a) $\sqrt{x(x-8)} = 5$ **b)** $\sqrt{4(x+3)} = x$ **c)** $\sqrt{7x+4} + x = 8$ **d)** $\sqrt{x-1} - \frac{1}{5}x = 1$

11 Bestimmen Sie die Lösungen der Wurzelgleichung $\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$ durch mehrfaches Quadrieren.

12 Das Unternehmen Sektum, das sich auf die Herstellung von kegelförmigen Sektgläsern spezialisiert hat, möchte neues Terrain betreten und ein neuartiges Cocktailglas produzieren. Das Design sieht 40 cm² Mantelfläche des Kreiskegels, aus dem man trinkt, bei einem Radius von 3 cm vor. Berechnen Sie das Volumen des Cocktailglases.

Zusammenfassung

Potenzfunktion

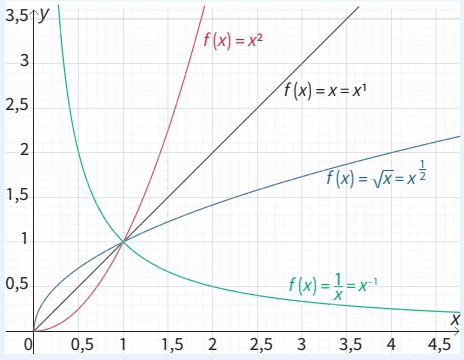
Eine Funktion f heißt **Potenzfunktion**, wenn gilt:

- $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ und $D(f) = \mathbb{R}_+$ oder
- $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ und $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ oder
- $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ und $D(f) = \mathbb{R}_+$.

Das Plus an der Menge $\mathbb{R}$ bedeutet, dass nur nicht-negative Zahlen enthalten sind: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Der Stern an der Menge $\mathbb{N}$ bedeutet, das die Zahl Null nicht enthalten ist: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Eine Potenzfunktion f: $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ heißt **Wurzelfunktion.**

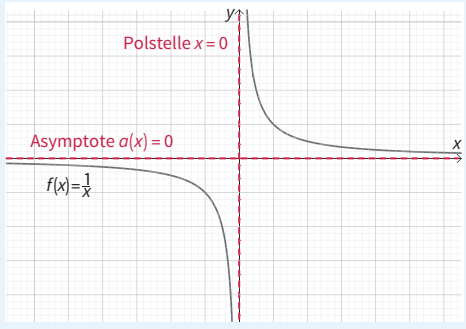


Grenzwert einer Funktion

Nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f für beliebig große x-Werte einer Zahl g an, so heißt diese Zahl g **Grenzwert** der Funktion f für $x \to +\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = g$ oder: für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to g$

Die Gerade a mit der Gleichung $a(x) = g$ heißt **waagerechte Asymptote** des Graphen von f für $x \to +\infty$.



Definitions- und Wertebereich verschiedener Potenzfunktionen

Die maximale Definitions- und Wertebereiche einer Potenzfunktion f mit der Gleichung

- $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ sind $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = \mathbb{R}$ für ungerade n oder $W(f) = \mathbb{R}_+$ für gerade n;
- $f(x) = x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ sind $D(f) = \mathbb{R}^*$, $W(f) = \mathbb{R}^*$ für ungerade n oder $W(f) = \mathbb{R}_+^*$ für gerade n;
- $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ sind $D(f) = \mathbb{R}_+$, $W(f) = \mathbb{R}_+$.

Symmetrie von Funktionsgraphen

Der Graph einer Funktion f ist genau dann **achsensymmetrisch** zur y-Achse, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt.

Der Graph einer Funktion f ist genau dann **punktsymmetrisch** zum Ursprung, wenn $-f(x) = f(-x)$ gilt.

Klausurtraining

Dauer der Klausur: 90 Minuten

1 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 2\sqrt{x-1} - 2$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von g in $[1;5]$ in ein Koordinatensystem.

b) Beschreiben Sie die Veränderungen des Graphen von g gegenüber dem Graphen von f mit $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge zur Gleichung: $g(x) = -4$.

d) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ und begründen Sie, warum $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ nicht möglich ist.

2 Der Hersteller Schokotop ist deutschlandweit bekannt für seine gefüllten Pralinen. Die Leckereien, die von außen mit feinster Schokolade überzogen sind, haben einen äußeren Durchmesser von 28 mm. Die Füllung verteilt sich kugelförmig im Inneren mit einem Durchmesser von 18 mm.

Ernährungsbewussten Personen versichert der Hersteller, dass die Pralinenfüllung 850 kJ und die äußere Schokoladenschicht maximal 560 kJ Kalorien hat.
Für eine Sortimentserweiterung möchte Schokotop nun Pralinen in verschiedenen Größen herstellen. Allerdings soll die Schokohülle genauso dick wie bei den bisherigen Produkten sein. In Planung sind bereits zwei Pralinen: die eine gefüllt mit einer weißen Creme und einem äußeren Durchmesser von 26 mm, die andere mit 5575 mm^3 Karamellfüllung.
Zudem steht fest, dass die Pralinen einen Mindestradius x von 5 mm haben sollen. Falls für den Radius einer Praline $5 \leq x \leq 6$ gilt, ist das Produkt mit einer Füllung von 115 mm^3 zu versehen.
Hinweis: Kugelvolumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

a) Bestimmen Sie für $x > 6$ die Funktion f, die in Abhängigkeit des äußeren Radius einer Praline die (innere) Füllmenge in mm^3 abbildet.

b) Beschreiben Sie die Veränderung des Graphen von f gegenüber dem Graphen der Funktion p mit $p(x) = x^3$.

c) Bestimmen Sie die Füllmenge der Praline in mm^3 und in cm^3, die eine weiße Creme erhalten soll.

d) Berechnen Sie den Radius der Praline, die mit Karamell gefüllt werden soll.

e) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x)$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

f) Beurteilen Sie, ob die Funktion f auf $[5; \infty)$ stetig ist.

7.1 Hinweise

7.1.1 Klausur Grundlagen

1 Bedenken Sie, dass die Lösungsmenge eine Teilmenge der natürlichen Zahlen sein muss. Die Berechnung der Gleichungen erfolgt mittels einfacher Äquivalenzumformungen.

2 Die Definition zu Funktionen ist hier sehr hilfreich.

3 Für $f(-1)$ ist die Definition zu Funktionen hilfreich.
Für die Achsenschnittpunkte gelten besondere Bedingungen, die in der Handlungssituation *Vermessung des Karlsruher Schlosses* behandelt wurden.
Der Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen bedeutet, dass sowohl die x- als auch die y-Werte oder Funktionswerte gleich sind.
Mithilfe des gegebenen Funktionsterms kann die gesuchte Stelle ermittelt werden.

4 Die Potenzgesetze, die in einem Satz beschrieben sind, werden benötigt.
Für den Anfangsbestand ist die Tatsache wichtig, dass viermal hintereinander verdoppelt wurde, bis der Bestand zum Zeitpunkt $t = 4$ auf 200 cm^3 gewachsen ist.
Für die Größe der Pilzkultur zwei Wochen vor $t = 4$ ist ebenfalls wichtig, wie häufig bis $t = 4$ verdoppelt werden muss.
Für die Vervielfachung der Pilzkultur in 5 Wochen sollte die Häufigkeit der Verdoppelung in Betracht gezogen werden.
Für einen Sachverhalt ist der Wert V_1 sowie die Addition der Exponenten wichtig.

7.1.2 Klausur Potenzfunktionen

1 **a)** Beachten Sie beim Zeichnen des Graphen von f das vorgegebene Intervall.
b) Beachten Sie die Handlungssituation *Wenn Funktionen für den Globus verändert werden müssen* und berücksichtigen Sie die unterschiedlichen Schreibweisen für Wurzelfunktionen.
c) Für die Berechnung der Lösungsmenge sind die Erkenntnisse zur Handlungssituation *Gleichungen lösen für eine gezielte Kundenwerbung* zu beachten. Eine besondere Bedeutung erhält dabei der Merksatz Strategie beim Lösen einer Wurzelgleichung.
d) Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ sollte angenähert werden, wie im Kapitel 2.1 dargestellt. Dabei sollten mehrere, größer werdende Abszissenwerte genutzt werden. Für $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ werten Sie beispielhaft $x = -10$ aus.

2 **a)** Beachten Sie, dass im Text der Durchmesser einer Praline angegeben wurde, die Funktion allerdings in Abhängigkeit des Radius dargestellt werden soll. Berechnen Sie zuerst den Radius der kugelförmigen Füllung in Abhängigkeit des Radius der Praline. Anschließend können Sie mithilfe der Volumenberechnung für Kugeln $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ die Funktionsgleichung aufstellen.
b) Vergleichen Sie mit der Handlungssituation *Wenn Funktionen für den Globus verändert werden müssen*.
c) Nach dem Umrechnen des Durchmessers für die Variable x muss nur noch die Funktion f geeignet genutzt werden. Für die Umrechnung von mm^3 in cm^3 ist zu bedenken, dass gilt: $(1\ cm)^3 = (10\ mm)^3$
d) Die Funktion f ist geeignet zu nutzen. In Verbindung mit der Handlungssituation *Gleichungen lösen für eine gezielte Kundenwerbung* ist dann der Radius x der Karamellpraline zu bestimmen.
e) Für die Annäherung an $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x)$ ist eine Wertetabelle sinnvoll. Auch hier gilt: Nutzen Sie zur Abschätzung genügend Abszissenwerte! Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x)$ geht aus dem Text hervor.
f) Für die Stetigkeit denken Sie an das Beispiel mit dem „Stift absetzen“.

7.2 Lösungen

7.2.1 Klausur Grundlagen

1 **a)** Es ist mit $f(x) = 2x + 3$ die Gleichung $f(x) = 7$ zu lösen: $2x + 3 = 7$
Zunächst sollte 3 auf beiden Seiten der Gleichung subtrahiert werden: $2x = 4$
Anschließend dividiert man die Gleichung durch 2, sodass man die Lösung erhält: $x = 2$
Wegen $x = 2 \in \mathbb{N}$ ist die Lösungsmenge $L = \{2\}$.

b) Es ist mit $f(x) = -x + 4$ die Gleichung $f(x) = 5$ zu lösen: $-x + 4 = 5$
Zunächst sollte 4 auf beiden Seiten der Gleichung subtrahiert werden: $-x = 1$
Anschließend dividiert man die Gleichung durch -1, so dass man $x = -1$ erhält. Wegen $x = -1 \notin \mathbb{N}$ ist die Lösungsmenge $L = \{\} = \emptyset$.

c) Es ist mit $f(x) = 5x + 2$ die Gleichung $f(x) = 6$ zu lösen: $5x + 2 = 6$
Zunächst sollte 2 auf beiden Seiten der Gleichung subtrahiert werden: $5x = 4$
Anschließend dividiert man die Gleichung durch 5, so dass man $x = \frac{4}{5}$ erhält.
wegen $x = \frac{4}{5} \notin \mathbb{N}$ ist die Lösungsmenge $L = \{\} = \emptyset$.

d) Es ist mit $f(x) = x^2 + 3$ die Gleichung $f(x) = 7$ zu lösen: $x^2 + 3 = 7$
Zunächst sollte 3 auf beiden Seiten der Gleichung subtrahiert werden: $x^2 = 4$
Anschließend zieht man die Quadratwurzel, sodass man $x = 2$ oder $x = -2$ erhält. Wegen $x = -2 \notin \mathbb{N}$ ist die Lösungsmenge $L = \{2\}$.

2 Laut Definition wird durch eine Funktion jedem x-Wert aus der Definitionsmenge genau ein y-Wert aus der Wertemenge zugeordnet. Bei der mittleren Abbildung wird beispielsweise dem Wert $x = 1$ die beiden y-Werte $y = 1$ sowie $y = -1$ zugeordnet. Also stellt das mittlere Schaubild keinen Funktionsgraphen dar.
Das linke Schaubild stellt eine eineindeutige Zuordnung dar; es ist somit der Graph einer Funktion. Jedem x-Wert aus der Definitionsmenge wird hier genau ein y-Wert zugeordnet. Sogar umgekehrt wird jedem y-Wert genau ein x-Wert zugeordnet. Die letzte Eigenschaft erfüllt der Graph in der rechten Abbildung nicht. Dennoch wird jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet; auch dieser Graph gehört zu einer Funktion.

3 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x - 5$ und $g(x) = -2x + 4$.

a) $f(-1) = -1 - 5 = -6$ und $g(5) = -2 \cdot 5 + 4 = -6$

b) Der Schnittpunkt mit der y-Achse folgt aus $x = 0$: $g(0) = -2 \cdot 0 + 4 = 4 \quad \Rightarrow S_y(0\,|\,4)$
Der Schnittpunkt mit der x-Achse folgt aus $g(x) = 0$: $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \Rightarrow S_x(2\,|\,0)$

c) Der Schnittpunkt der beiden Geraden lässt sich durch die Gleichung $f(x) = g(x)$ bestimmen:
$x - 5 = -2x + 4$
$3x = 9$
$x = 3$
Für einen Schnittpunkt muss noch der y-Wert durch Einsetzen der Schnittstelle $x = 3$ berechnet werden: $f(3) = g(3) = -2 \Rightarrow S(3\,|\,-2)$

d) Da der Punkt $(x\,|\,-4)$ auf dem Graphen von g liegt, ist zur Ermittlung von x die Gleichung $g(x) = 4$ zu lösen: $-2x + 4 = -4$
$-2x = -8$
$x = 4$

4 Bekannt ist, dass sich eine Pilzkultur wöchentlich verdoppelt, damit lässt sich Funktionsgleichung darstellen: $V(t) = V_0 \cdot 2^t$

a) Nach vier Wochen zum Zeitpunkt $t = 4$ ist eine Pilzkultur mit einem Volumen von 200 cm^3 herangewachsen, also ist die Gleichung $V(4) = 200$ zu lösen: $V_0 \cdot 2^4 = 200$
$V_0 = \frac{200}{16} = 12{,}5$
Man hat mit einer Pilzkultur der Größe 12,5 cm^3 angefangen.

Glossar ökonomischer Begriffe

(Angebots-)Monopol	Marktform mit nur einem Anbieter.
Erlöse, Erlösfunktion	$E(x)$; Erlöse („Einnahmen“) beim Verkauf eines Produktes, berechnet als Produkt von Menge und Stückpreis.
Fixkosten	K_f; Anteil der Kosten, die unabhängig von der Menge sind.
Fixkostendegression	Der Fixkostenanteil, der einer einzelnen Mengeneinheit zugeordnet wird, nimmt bei steigender Produktion ab.
Geldeinheiten	GE; Oberbegriff, kann stehen für: Euro, Dollar, Yen etc. Oftmals zur Vereinfachung: z. B. 1 GE entspricht 10.000 €.
Geldeinheiten pro Mengeneinheit	$\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$; GE bezogen auf eine ME. Wird benötigt bei der Angabe von Preisen oder auch den Kosten pro Stück. Kann z. B. Euro pro Stück bedeuten.
Gewinn, Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$; Gewinn beim Verkauf eines Produktes; Differenz von Erlös und Kosten
Gewinngrenze	Produktionsmenge, bis zu der noch kein Verlust erzielt wird. Nullstelle der Gewinnfunktion.
Gewinnmaximale Menge	Produktionsmenge, bei der der Gewinn am höchsten ist. x-Wert des Hochpunktes von $G(x)$.
Gewinnmaximum	Maximum der Gewinnfunktion
Gewinnschwelle	Produktionsmenge, ab der kein Verlust mehr erzielt wird. Nullstelle der Gewinnfunktion.
Investmentfonds	Ein Investmentfonds ist ein Sondervermögen, welches von einer Investmentgesellschaft verwaltet wird. Das eingelegte Geld wird von der Investmentgesellschaft in Wertpapiere, Immobilien oder Vermögensgegenstände angelegt.
Kapazitätsgrenze	Maximal mögliche Stückzahl. Hilft bei der Festlegung des ökonomischen Definitionsbereichs. Beschreibt, welcher x-Wert maximal angenommen werden kann.
Kostenfunktion, Gesamtkosten	$K(x)$; Funktion, die den Zusammenhang angibt zwischen der produzierten Stückzahl (x) und den dabei entstehenden Kosten $(K(x))$.
Mengeneinheiten	ME; Oberbegriff für die Mengenbeschreibung. Kann stehen für: Stück, Liter, Kilogramm etc. Oftmals auch zur Vereinfachung: 1 ME kann z. B. für 1 000 Stück stehen.
Monopolist	Alleiniger Anbieter im (Angebots-)Monopol. Kann den Preis wählen, muss aber seine Kosten und das Verhalten der Nachfrager berücksichtigen.
Nachfragefunktion	$p_n(x)$; beschreibt das Verhalten der Nachfrager.

Bildquellenverzeichnis

|Alamy Stock Photo, Abingdon/Oxfordshire: Gavin, Julia 91.2.

|Berghahn, Matthias, Bielefeld: Rodel- und Freizeitparadies St. Englmar GmbH 8.2, 183.1.

|Brauner, Angelika, Hohenpeißenberg: 207.1, 208.1, 208.2, 209.1, 209.2, 211.2, 213.1.

|Druwe & Polastri, Cremlingen/Weddel: 7.3, 77.1, 77.2, 77.3, 105.1, 159.1, 178.1.

|Giertzsch, Stefan, Werder (Havel): 20.1, 23.1, 32.1, 33.1, 184.1, 184.2, 186.1, 187.1, 187.2, 188.1, 189.1, 191.1, 191.2, 194.1, 197.1, 198.1, 200.2, 202.1, 203.1, 210.2, 212.2, 214.1, 214.3, 215.1, 215.2, 217.1, 217.2, 218.1, 220.1, 221.1, 234.1.

|Google Earth: 19.1, 19.2.

|Google Maps / Street View: Pagina Media 8.1, 17.1, 18.1, 155.1.

|iStockphoto.com, Calgary: R Sherwood Veith 92.1.

|Langner & Partner Werbeagentur GmbH, Hemmingen: 84.1, 174.1, 176.2.

|Lookphotos, München: H. & D. Zielske 176.1.

|mauritius images GmbH, Mittenwald: H. Schwarz 24.1.

|Microsoft Deutschland GmbH, München: 30.1.

|PantherMedia GmbH (panthermedia.net), München: baranq 168.1; benq44444 162.1.

|Peters, Jens, Bunde: 5.1, 52.1.

|Shutterstock.com, New York: Dagan, Kobby 30.2.

|stock.adobe.com, Dublin: Animaflora PicsStock 205.2; blambca 86.1, 93.2; bryanpollard 93.1; cherezoff 74.1; contrastwerkstatt 46.1, 192.1; Dan Race 125.2; daphnusia 219.1; DimaBerlin 129.1; Dimitri 7.2, 38.1, 45.1; djvstock 106.1; dream79 101.1; dreibirnen 156.1; Eberhard 206.1; Fittipaldi, Mercedes 63.1; fotoak80 180.1; fotoduets 141.1; fotomek 3.1, 7.1, 9.1; franzeldr 102.1; Gawryluk, Slawomir 125.1; georgejmclittle 100.1; Germán Vilela, Álvaro 155.2; giorgiocavallaro 205.1; Gorodenkoff 135.1; Grandini, Alessandro 124.3; ijeab 193.1; jijomathai 182.1; Jovan 211.1; Kneschke, Robert 24.2; korkeng 144.1; Krautwald, Sven 156.2, 163.1; Kzenon 126.1; laranik 124.1, 140.2; Limbach, Alexander 8.3, 222.1; magele-picture 64.1; Mark, Ocskay 26.1; MQ-Illustrations 6.1, 153.1; Naumov, Dmitry 124.2; New Africa 68.1, 134.1; pamela_d_mcadams 76.1; peterschreiber.media 7.4, 116.1; photollurg 91.1; phstudio_1 5.2, 112.1; pixarno 74.2; Pixel62 213.2; Rawf8 39.1; rhoenes Titel, Titel; Schurr, Stefan 16.1; Shevchuk, Volodymyr 35.1; showcake 151.1; Stanislav 130.1; StockPhotoPro 140.1; Supertrooper 160.1; TIMDA-VIDCOLLECTION 117.1; tina7si 212.1; Tryfonov 56.1; vege 25.1; Wagner, Frank 200.1, 200.3; WoGi 87.1; Zerbor 67.1.

Wir arbeiten sehr sorgfältig daran, für alle verwendeten Abbildungen die Rechteinhaberinnen und Rechteinhaber zu ermitteln. Sollte uns dies im Einzelfall nicht vollständig gelungen sein, werden berechtigte Ansprüche selbstverständlich im Rahmen der üblichen Vereinbarungen abgegolten.