

1 Arbeiten mit Termen

Terme

Ein Term ist eine (mathematisch) sinnvolle Zusammensetzung aus (Rechen)-Zeichen, Zahlen (auch Konstanten genannt) und Größen sowie Variablen.

Beispiel 1: Terme sind beispielsweise die Zahl 8, die Variable x oder der Rechenausdruck $8 + (x - x \cdot y)$.

Für die Berechnung von Termen gelten Rechenregeln, manchmal auch Vorrangregeln genannt.

	Rechenregel	Beispiel	Analogie zum Straßenverkehr
1.	Klammern zuerst und dabei von innen nach außen	$[14 + (7 + 12)] - 2 \cdot 5^2 + x$ $= [14 + 19] - 2 \cdot 5^2 + x$ $= 33 - 2 \cdot 5^2 + x$	Regelt ein Verkehrspolizist den Verkehr, haben seine Handzeichen immer Vorrang.
2.	Potenzen	$= 33 - 2 \cdot 5^2 + x$ $= 33 - 2 \cdot 25 + x$	Lichtzeichen an Ampeln haben Vorrang vor Verkehrszeichen.
3.	Punktrechnung vor Strichrechnung	$= 33 - 2 \cdot 25 + x$ $= 33 - 50 + x$	Verkehrszeichen haben Vorrang vor Vorfahrtsregeln.
4.	von links nach rechts	$= 33 - 50 + x$ $= -17 + x$	Vorfahrtsregel „rechts vor links“

Termstrukturen

Die Struktur (der Name) eines Terms richtet sich immer nach der zuletzt ausgeführten Operation.

	genutzte Rechenregel	zuletzt ausgeführte Operation	(Term)Struktur
$x + 16 \cdot 3 = x + 48$	Punkt- vor Strichrechnung	addieren	Summe
$(a + 2) - 3$	Klammern zuerst	subtrahieren	Differenz
$9^2 \cdot y = 81 \cdot y$	Potenzen vor Punktrechnung	multiplizieren	Produkt
$(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$	Klammern zuerst	potenzieren	Potenz
$7 : (5 - 2 + 4)$ $= 7 : 7 = 1$	Klammern zuerst, von links nach rechts	dividieren	Quotient
$\frac{2+18}{7+3} = \frac{20}{10} = 2$	von links nach rechts	dividieren	Bruch

Zusammenfassen von Termen

Zusammenfassen von Gliedern einer Summe

Gleichartige Glieder einer Summe können zusammengefasst werden, nicht gleichartige dagegen nicht!

Beispiel 2:

$$\begin{array}{rclcl}
 5 \text{ Äpfel} & \text{und} & 3 \text{ Äpfel} & \text{sind} & 8 \text{ Äpfel} \\
 5a & + & 3a & = & 8a \\
 2 \text{ Äpfel} & \text{und} & 3 \text{ Birnen} & \text{bleiben} & 2 \text{ Äpfel und } 3 \text{ Birnen} \\
 2a & + & 3b & = & 2a + 3b
 \end{array}$$

! Ebenso wie im Alltag gilt: Gleichartige Dinge (z. B. Äpfel) können zusammengefasst werden, unterschiedliche Dinge (z. B. Äpfel und Birnen) nicht.

Der Term $-2y + 4x - 8xy + x + 9y$ besteht aus 5 Summanden, den fünf Gliedern einer Summe.

Jedes dieser 5 Glieder besteht wiederum aus einem Koeffizienten und einer Variable:

Beispiel 3: $-2y = (-2) \cdot y$ besteht aus dem Koeffizienten (-2) und der Variable y

Glieder einer Summe oder Differenz, die sich nur in einem Koeffizienten unterscheiden, heißen gleichartig. Glieder einer Summe oder Differenz können vertauscht werden!

Fasse die folgende Summe zusammen: $9a + 10b + 9a^2 - 8b + 11a - 2a^2$

1. Schritt: Ordnen $= 9a + 11a + 9a^2 - 2a^2 - 8b + 10b$
 2. Schritt: Ausklammern $= (9 + 11)a + (9 - 2)a^2 + (-8 + 10)b$
 3. Schritt: Zusammenfassen $= 20a + 7a^2 + 2b$
- Da $a^2 = a \cdot a \neq a + a = 2a$ können $20a$ und $7a^2$ nicht weiter zusammengefasst werden.

Multiplikation von Produkten

Sicherlich erinnerst du dich an die Berechnung der Flächeninhalte von Rechtecken.

Damit kann man gut die Multiplikation von Produkten erläutern:

Beispiel 4:

$$A = (3 \cdot 1 \text{ cm}) \cdot (2 \cdot 2 \text{ cm})$$

$$A = 3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}$$

$$A = 3 \cdot 4 \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}$$

$$A = 12 \text{ cm}^2$$

$$A = (a + a) \cdot (b + b + b)$$

$$A = 2a \cdot 3b$$

$$A = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b$$

$$A = 6 \cdot ab$$

$$A = 6ab$$



Zahlen werden mit Zahlen multipliziert. (Größen)-Einheiten werden mit identischen (Größen)-Einheiten multipliziert. Variablen werden mit Variablen multipliziert. Ungleiche Variablen können nicht weiter zusammengefasst werden.

In Produkten werden gleiche Faktoren zusammengefasst. Dabei multipliziert man zunächst alle Zahlen miteinander, anschließend multipliziert man die Variablen miteinander. Abschließend multipliziert man das Produkt der Zahlen mit dem Produkt der Variablen.

In Produkten kann man gleichartige Faktoren zu Potenzen zusammenfassen, dies vereinfacht vor allem die Arbeit mit Variablen:

Beispiel 5: $A = (a + a) \cdot (b + b + b) = 2a \cdot 3b = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 6 \cdot ab = 6ab$

Sowohl Koeffizienten als auch identische Variablen können auch dividiert werden.

Beispiel 6: $18a : 3a = (18 : 3) \cdot (a : a) = 6 \cdot 1 = 6$

Beispiel 7: $64ab : 8b = (64 : 8) \cdot (a \cdot b : a) = 8 \cdot (b : a \cdot a) = 8 \cdot b \cdot 1 = 8b$

Beispiel 8: $256a : 16b = (256 : 16) \cdot (a : b) = 16 \cdot (a : b) = 16 \cdot \frac{a}{b}$

Ungleiche Variablen können nicht durcheinander dividiert werden.



Die Division durch 0 ist nicht definiert, daher muss immer sichergestellt werden, dass nicht durch 0 dividiert wird! Die Variable kann nicht den Wert 0 annehmen.

Ausklammern und Faktorisieren

Beim **Ausklammern** wird ein Faktor, der in allen Gliedern des Terms vorkommt, aus Summe oder Differenz ausgeklammert, also vor oder hinter die Klammer gestellt.

Beispiel 9: Klammere einen möglichst großen Faktor aus: $72x^3 - 32xy$.

1. Schritt: Ermittle die gemeinsamen Faktoren.

$$72x^3 - 32xy = 8 \cdot 9 \cdot x \cdot x \cdot x - 4 \cdot 8 \cdot x \cdot y$$

2. Schritt: Zerlege die Produkte der Variablen in Faktoren und bestimme die gemeinsamen Faktoren: $8 \cdot x \cdot 9 \cdot x \cdot x - 8 \cdot x \cdot 4 \cdot y$

3. Schritt: Stelle alle gemeinsamen Faktoren vor die Klammer:

$$8 \cdot x \cdot (9 \cdot x \cdot x - 4 \cdot y) = 8x \cdot (9x^2 - 4y)$$

Kontrolle durch Faktorisieren: $8x \cdot (9x^2 - 4y) = 8x \cdot 9x^2 - 8x \cdot 4y = 72x^3 - 32xy$

Das **Ausmultiplizieren (Faktorisieren)** ist das „Rückwärtsrechnen“ des Ausklammerns. Dabei wird jedes Glied einer Summe/Differenz mit dem Faktor multipliziert.

Beispiel 10: $5 \cdot (5x - 2y) = 5 \cdot 5x - 5 \cdot 2y = 25x - 10y$

Beispiel 11: $b(a^2 + 9) = b \cdot a^2 + b \cdot 9 = a^2b + 9b$

Mithilfe des Ausmultiplizierens lässt sich überprüfen, ob richtig ausgeklammert wurde.

Binomische Formeln

Multiplizieren von Summen und Differenzen

Auch die Multiplikation von Summen kann man gut mit der Berechnung von Flächen veranschaulichen.

Für die hier dargestellte Gesamtfläche gilt einmal

$$A_{\text{ges}} = (a + b) \cdot (c + d)$$

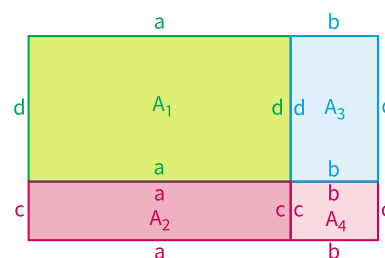
oder als Summe der Teilflächen:

$$A_1 = a \cdot d; A_2 = a \cdot c; A_3 = b \cdot d; A_4 = b \cdot c$$

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = a \cdot d + a \cdot c + b \cdot d + b \cdot c$$

Zusammengefasst gilt also:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot d + a \cdot c + b \cdot d + b \cdot c$$



$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Man multipliziert zwei Summen/Differenzen miteinander, indem man jedes Glied der ersten Summe/Differenz mit jedem Glied der zweiten Summe/Differenz multipliziert.

Beispiel 12: $(9^a - 6) \cdot (7 + 5b) = 9^a \cdot 5b + 9^a \cdot 7 - 6 \cdot 7 - 6 \cdot 5b = 45^ab + 63^a - 42 - 30b$

© Westermann

Binomische Formeln

Eine Vereinfachung des Multiplizierens zweier Klammern stellen die drei binomischen Formeln dar. Dabei bestehen beide Klammern aus den gleichen Faktoren.

1. Binomische Formel

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 \\ = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$



Bei den beiden ersten binomischen Formeln steht vor den beiden Quadraten ein Pluszeichen, während bei der dritten binomischen Formel vor dem zweiten Quadrat ein Minuszeichen steht.

Für die Variablen a und b können beliebige Faktoren eingesetzt werden.

Beispiel 13: $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

In der Klammer steht ein Plus, es gilt die 1. Binomische Formel mit $a = 3x$ und $b = 5y$, alle resultierenden Rechenzeichen sind Pluszeichen.

Beispiel 14: $(8s - 9t)^2 = (8s)^2 - 2 \cdot 8s \cdot 9t + (9t)^2 = 64s^2 - 144st + 81t^2$

In der Klammer steht ein Minuszeichen, folglich gilt die 2. Binomische Formel mit $a = 8s$ und $b = 9t$. Vor den beiden Quadraten steht ein Pluszeichen, vor dem gemischten Term ein Minuszeichen.

Beispiel 15: $(h - 4z) \cdot (4z + h) = h^2 - 4 \cdot z \cdot h + 4 \cdot z \cdot h - (4z)^2 = h^2 - 16z^2$

In beiden Klammern stehen verschiedene Rechenzeichen, folglich ist die 3. Binomische Formel mit $a = h$ und $b = 4z$ anzuwenden.

Bruchterme

Ein Bruchterm ist ein Term, der mindestens einen Bruch enthält, bei dem eine Variable im Nenner steht.

Beispiel 16: Bruchterme sind beispielsweise $\frac{1}{x}$; $\frac{98}{x-17}$; $\frac{e+f}{g}$; $\frac{x+y}{x-y}$; $\frac{a+2}{a \cdot (a+1)}$; $\frac{256x^2 - 144^2}{8x + 6y}$

- Ein Bruch ist eine andere Schreibweise für einen Quotienten: $\frac{8}{9} = 8 : 9$.
- Somit können auch Bruchterme als Quotienten geschrieben werden: $\frac{8x}{x+9} = 8x : (x+9)$
- Auch Bruchterme können erweitert oder gekürzt werden, dazu werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl oder dem gleichen Term multipliziert:

$$\frac{8x}{x+9} = \frac{2 \cdot 8x}{2 \cdot (x+9)} = \frac{16x}{2x+18}; \quad \frac{5+x}{2x} = \frac{x \cdot (5+x)}{x \cdot 2x} = \frac{5x+x^2}{2x^2}; \quad \frac{7xy}{2x^2+3x} = \frac{x \cdot 7y}{x \cdot (2x+3)} = \frac{7y}{2x+3}$$

Beim Erweitern und Kürzen ändert sich der Wert des Bruches/des Bruchterms nicht!

- Die Division durch 0 ist nicht definiert. Deswegen sind Bruchterme für alle Variablenwerte nicht definiert, für die der Nenner Null wird: $\frac{2x}{x-3}$ ist nicht definiert für $x = 3$, da $3 - 3 = 0$.

* a) $a(1 + 5b) =$

[illegible]

b) $3u(2u^2 - 3) =$

[illegible]

c) $\frac{1}{7}y(4x - 3) =$

[illegible]

4 Vereinfache. Rechne immer erst die inneren Klammern aus, bevor du die äußeren auflöst.

✖✖ a) $[(x+y)^2 - (x+y)(x-y)] + (x-y)^2 =$

[illegible]

b) $(3x - 2y)^2 - 3[(2x + y)^2 - 2(x + 1)(x - 1)] =$

[illegible]

c) $-4(2a + 1)(a + 2) + [(a + 8)^2 - 2(2a - 4)^2] =$

[illegible]

1 Multipliziere aus und vereinfache soweit wie möglich.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

A blank sheet of graph paper with a grid of squares. The grid consists of 20 columns and 10 rows of small squares. There are no margins or additional markings on the page.

45 min

a) Der Term $8 \cdot (x + 19)^2 - 7$ hat die Struktur:

b) Fasst man den Term $3x^2 - x + 3x - 3,5x^2$ zusammen, ergibt sich:

c) Ausmultiplizieren des Terms $(5x - 7y)^2$ ergibt:

$$\blacksquare 25x^2 - 70xy + 49y^2 \qquad \blacksquare 25x^2 - 35xy + 49y^2$$

[illegible]

a) $7c - (6c - 7d) =$

[illegible][illegible][illegible][illegible]

[illegible]



[illegible]



✱
✱

[illegible]



[illegible]



[illegible]



[illegible]

c) $(\underline{\hspace{2cm}} - 5)^2 = z^2 - \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} =$



/ 35