

1 Zuordnungen und Proportionalität

Zuordnungen und geordnete Zahlenpaare

Oft hängt eine Größe von einer anderen Größe ab, z. B. der Umfang eines Rechtecks von der Länge seiner Seiten. Eine solche Abhängigkeit nennt man eine **Zuordnung** $x \mapsto y$ (der Größe x wird die Größe y **zugeordnet**).

Eine solche Zuordnung beschreibt, wie sich die Größe y in Abhängigkeit von der Größe x verändert.

Zusammengehörende Werte von x und y gibt man als **geordnetes Zahlenpaar** $(x|y)$ an. Hat man mehrere solcher geordneter Zahlenpaare, kann man sie in einer **Wertetabelle** zusammenfassen.

Beispiel 1: Lena interessiert sich für den Verlauf der Außentemperatur.

Sie blickt daher in größeren Zeitabständen auf das Balkon-Thermometer und notiert in Satzform:

- Um 9.00 Uhr beträgt die Temperatur 16°C .
- Um 11.00 Uhr beträgt die Temperatur 19°C .
- Um 12.30 Uhr beträgt die Temperatur 21°C .

in Kurzform:

- 9.00 Uhr $\mapsto 16^\circ\text{C}$
- 11.00 Uhr $\mapsto 19^\circ\text{C}$
- 12.30 Uhr $\mapsto 21^\circ\text{C}$

Allgemein: Um x Uhr beträgt die Temperatur $y^\circ\text{C}$. x (Uhr) $\mapsto y$ ($^\circ\text{C}$)

Es wird also jeder Uhrzeit jeweils eine Temperatur zugeordnet. Diese Zuordnung kann auch mit geordneten Zahlenpaaren oder als Wertetabelle dargestellt werden.

Du erhältst die folgenden geordneten Zahlenpaare:

$(9.00|16)$; $(11.00|19)$; $(12.30|21)$; ...

Wertetabelle:

x (Uhr)	9.00	11.00	12.30	...
y ($^\circ\text{C}$)	16	19	21	...

Direkte Proportionalität (je mehr desto mehr)

Wenn bei einer Zuordnung $x \mapsto y$ eine Verdopplung, Verdreifachung, ... von x stets zu einer Verdopplung, Verdreifachung, ... von y führt, dann sind die beiden Größen x und y **direkt proportional** (kurz: **proportional**) zueinander.

Beispiel 2: Betrachte folgende Wertetabelle einer Zuordnung.

a)

x	0	2	4	6
y	0	1	2	3

$\cdot 2$ $\cdot 3$ $\cdot 1,5$
 $\cdot 2$ $\cdot 3$ $\cdot 1,5$

b)

x	0	2	4	6
y	0	1	2	3
$\frac{y}{x}$	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Du erkennst, dass x und y (direkt) proportional zueinander sind, weil du auf die y -Werte immer die selbe Rechenoperation anwenden kannst wie auf die x -Werte. Wenn du die x -Werte durch die y -Werte teilst, stellst du fest, dass das Ergebnis immer gleich ist: Proportionale Zuordnungen sind **quotientengleich**.

Die Proportionalität kannst du also auch an einer **Konstanz des Quotienten** $\frac{y}{x}$ erkennen.

Dreisatzrechnung bei direkter Proportionalität

Wenn man weiß, dass es sich bei einer Zuordnung um eine direkte Proportionalität handelt, kann man aus einem geordneten Zahlenpaar mit dem Prinzip des **Dreisatzes** jedes beliebige andere Zahlenpaar ausrechnen. Der Dreisatz heißt so, weil es drei Rechenschritte sind, die an folgendem Beispiel erklärt werden sollen:

Beispiel 3: Eine Betriebskantine benötigt täglich 77 kg Kartoffeln, um 220 Personen zu versorgen. Während der Urlaubszeit essen dort jedoch nur 180 Personen. Wie viel Kilogramm Kartoffeln werden dann benötigt?

Die gesuchte Menge wird in drei Schritten (**Dreisatz**) ermittelt:

1. Schritt: Notiere das gegebene Zahlenpaar (220 | 77) so, dass die gesuchte Größe auf der rechten Seite steht.

$$\begin{array}{l} 220 \text{ P.} \triangleq 77 \text{ kg} \\ 1 \text{ P.} \triangleq \frac{77 \text{ kg}}{220} = 0,35 \text{ kg} \\ 180 \text{ P.} \triangleq 0,35 \cdot 180 = 63 \text{ kg} \end{array}$$

2. Schritt: Zurückrechnen auf die Einheit (hier: beide Seiten durch 220 dividieren, um die benötigte Menge für eine Person zu erhalten).

3. Schritt: Hochrechnen auf die gesuchte Größe (mit 180 multiplizieren, um die gesuchte Menge für 180 Personen zu ermitteln).

Manchmal ist es sinnvoll, auf eine andere Einheit als die „1“ zurückzurechnen! Jeder gemeinsame Teiler der gegebenen und gesuchten Zahl kommt dafür infrage.

Indirekte Proportionalität (je mehr, desto weniger)

Wenn bei einer Zuordnung $x \mapsto y$ eine Verdopplung, Verdreifachung, ... von x stets zur Hälfte, zum dritten Teil, ... von y führt, dann sind die beiden Größen x und y **indirekt proportional** (auch: **umgekehrt proportional**) zueinander.

Beispiel 4:

a)

x	1	2	3
y	12	6	4

$\cdot 2 \quad \cdot 1,5$
 $\cdot 3$
 $: 2 \quad : 1,5$
 $: 3$

b)

x	1	2	3
y	12	6	4
$x \cdot y$	$1 \cdot 12 = 12$	$2 \cdot 6 = 12$	$3 \cdot 4 = 12$

Du erkennst, dass x und y indirekt proportional zueinander sind, weil du auf die y -Werte immer die umgekehrte Rechenoperation anwenden kannst wie auf die x -Werte. Indirekt proportionale Zuordnungen sind **produktgleich**. Die indirekte Proportionalität kannst du also daran erkennen, dass die **Konstanz des Produktes** $x \cdot y$ vorliegt (b).

Dreisatzrechnung bei indirekter Proportionalität

Man geht wie bei der Dreisatzrechnung bei direkter Proportionalität vor, nur muss man jetzt auf beiden Seiten der Entsprechungen ($\triangleq$) **entgegengesetzte** Rechenoperationen ausführen.

Beispiel 5: 8 Pflücker benötigen

15 Tage, um eine Apfelplantage vollständig abzuernten. Wie lange dauert es, wenn 2 zusätzliche Kräfte eingesetzt werden können?

Mache dir zunächst klar, dass es sich um eine Proportionalität nach dem Schema „je mehr desto weniger“ handelt:



Je *mehr* Pflücker eingesetzt werden, desto *weniger* Zeit wird benötigt!

$$\begin{array}{l} 8 \text{ P.} \triangleq 15 \text{ d} \\ : 8 \quad 1 \text{ P.} \triangleq 15 \text{ d} \cdot 8 = 120 \text{ d} \\ \cdot 10 \quad 10 \text{ P.} \triangleq 120 \text{ d} : 10 = 12 \text{ d} \end{array}$$

1 Pflücker braucht 8-mal so lang,
10 Plücker schaffen es in einem
Zehntel der Zeit.

10 Pflücker benötigen für die Arbeit 10 Tage.

Direkte und indirekte Proportionalität unterscheiden

Bei Textaufgaben zur direkten und indirekten Proportionalität ist es nicht immer leicht zu erkennen, welche der beiden Proportionalitäten vorliegt. Außerdem kann natürlich auch weder das eine noch das andere vorliegen. Gehe daher bei Textaufgaben folgendermaßen vor:

1. Prüfe, ob es sich überhaupt um einen „je mehr desto mehr“- bzw. „je mehr desto weniger“-Sachverhalt handelt.
2. Wenn ein solcher Zusammenhang besteht, dann prüfe mithilfe der Zahlenangaben und der Konstanz des Quotienten (des Produktes) ob es sich wirklich um eine direkte (indirekte) Proportionalität handelt.

Beispiel 6: Entscheide, welche Proportionalität vorliegt.

a) Ein Huhn braucht zum Ausbrüten von drei Eiern 21 Tage. Wie lang braucht es für sieben Eier? $\Rightarrow$ Die Brutdauer ist für jedes Hühnerei gleich, daher dauert es nicht länger, wenn das Huhn mehr Eier ausbrütet. Es liegt also **keine** Proportionalität vor.

b) Ein Supermarkt wirbt mit folgendem Angebot für Cola: „Kauf drei Flaschen, bezahle nur zwei.“ $\Rightarrow$ Hier handelt es sich zwar um eine „je mehr desto mehr“ Beziehung (je mehr Flaschen du kaufst, desto mehr musst du bezahlen), aber **nicht** um eine direkte Proportionalität, denn drei Flaschen kosten nicht dreimal so viel wie eine.

© Westermann

Grafische Darstellung von Zuordnungen

Man kann Zuordnungen in einem **Achsenkreuz** grafisch darstellen.

Eine solche Darstellung hat den Vorteil, dass man sich einen besseren Überblick verschaffen und außerdem weitere Zuordnungen, bzw. Zahlenpaare ablesen kann.

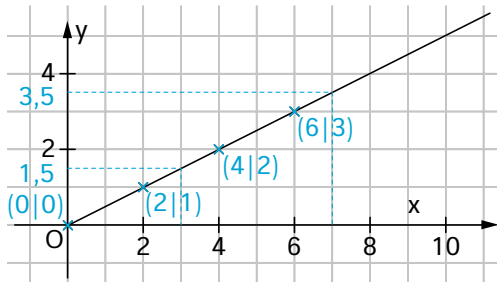
Ein Achsenkreuz wird durch die waagerechte **x-Achse** und die senkrechte **y-Achse** gebildet. Die beiden Achsen kreuzen sich im **Nullpunkt (0|0)**, auch **Ursprung** genannt. Er wird mit O bezeichnet.

Alle Zahlenpaare einer proportionalen Zuordnung liegen auf einer **Halbgeraden**, die durch den Ursprung geht. Die Zahlenpaare einer indirekten proportionalen Zuordnung liegen auf einer sogenannten **Hyperbel**.

Beispiel 7: a) Wenn 2 kg Kartoffeln (Menge x) 1 € (Preis y) kosten, so lässt sich folgende Wertetabelle notieren:

x (kg)	0	2	4	6
y (€)	0	1	2	3

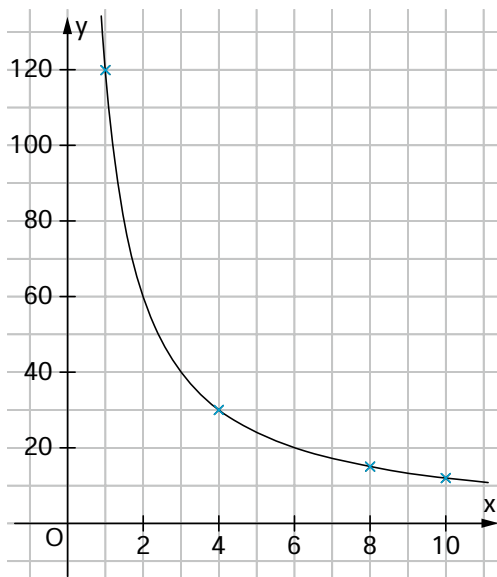
Die **Darstellung im Achsenkreuz** zeigt alle geordneten Zahlenpaare aus der Wertetabelle. Außerdem kann man weitere Zuordnungen bzw. Zahlenpaare ablesen, z. B. (3|1,5) oder (7|3,5).



b) Beispiel 5 (Apfelpflücker) als Wertetabelle dargestellt:

x (Anzahl Pflücker)	y (Erntetage)
1	120
4	30
8	15
10	12

! Manchmal ist es erforderlich, die berechneten Werte einer Zuordnung auf ganze Zahlen zu runden, da es z. B. keine 3,5 Menschen oder 6,3 produzierte Autos gibt. Achte gut darauf, ob es von der berechneten Größe Bruchteile geben kann oder nicht.



Test 1: Zuordnungen und Zahlenpaare

1 Setze ein:

* Achsenkreuz • Zuordnung • Wertetabelle • geordnetes Zahlenpaar • x • y • senkrecht • proportional

Die _____ $x \mapsto y$ beschreibt, wie sich die Größe y in Abhängigkeit von der Größe _____ verändert. x und y sind direkt _____ zueinander. Wenn man x verdreifacht, dann muss sich auch _____ verdreifachen. Die Angabe $(3|5)$ ist ein _____. Verschiedene Angaben dieser Art können in einer _____ zusammengefasst werden. Die grafische Darstellung einer Zuordnung erfolgt in einem _____. Es besteht aus zwei Zahlenstrahlen, die _____ zueinander liegen.

2 Ergänze folgende Tabellen.

* a) x und y sind proportional.

x	1		4	5
y		3	6	
$\frac{y}{x}$				

b) x und y sind indirekt proportional.

x	2	3		6
y		4	3	
$x \cdot y$				

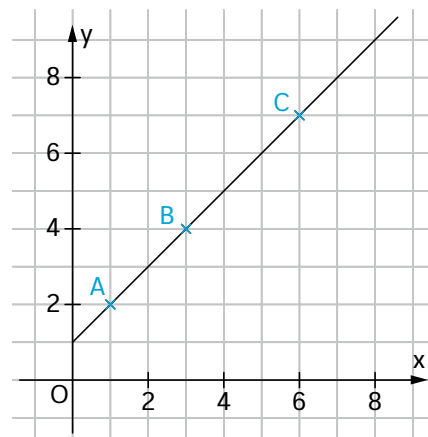
3 a) Gib die abgebildeten Punkte als geordnete Zahlenpaare an.

A(|); B(|); C(|)

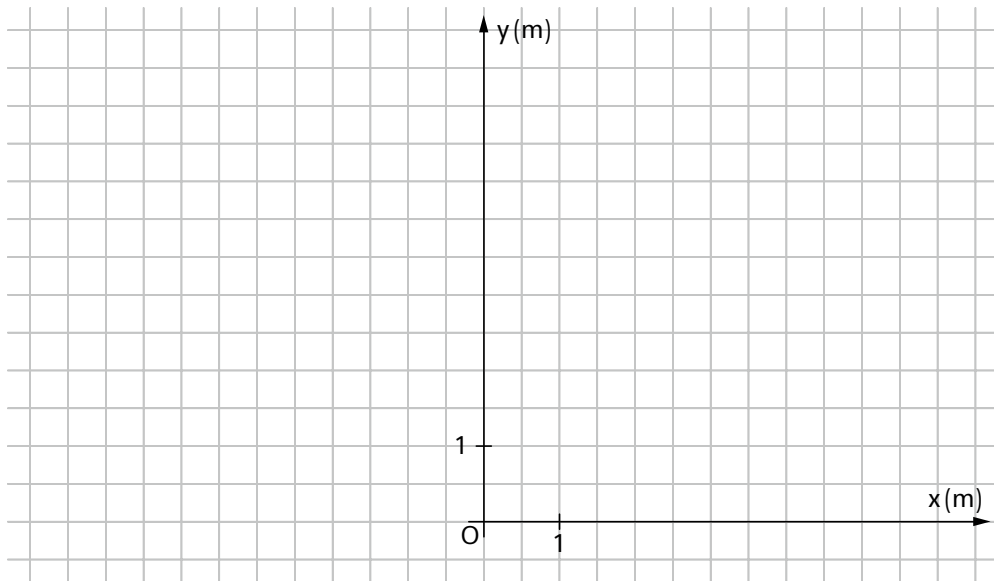
b) Gib zwei weitere Punkte an, die auf der Halbgeraden liegen.

D(|); E(|)

c) Prüfe, ob die Abbildung einen proportionalen Zusammenhang zeigt. Begründe.



- b) Lisa überlegt inzwischen, welche anderen rechteckigen Flächen mit der gleichen Menge Farbe gestrichen werden könnten. Sie trägt dazu verschiedene Fußbodenmaße in ein Achsenkreuz ein. Was fällt auf?



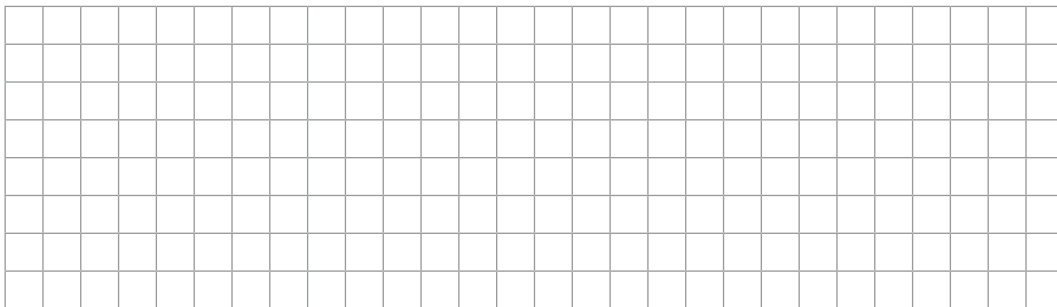
4 Gegeben ist das Zahlenpaar $(6|15)$. Ergänze folgende Zahlenpaare

- * a) bei direkter Proportionalität.

$(2|\quad)$; $(\quad|45)$; $(9|\quad)$; $(\quad|90)$; $(0,5|\quad)$

- b) bei indirekter Proportionalität.

$(2|\quad)$; $(\quad|45)$; $(9|\quad)$; $(\quad|90)$; $(0,5|\quad)$



$(2|5)$
 $(6|5)$
 $(18|45)$

$(2|45)$
 $(9|10)$
 $(30|3)$



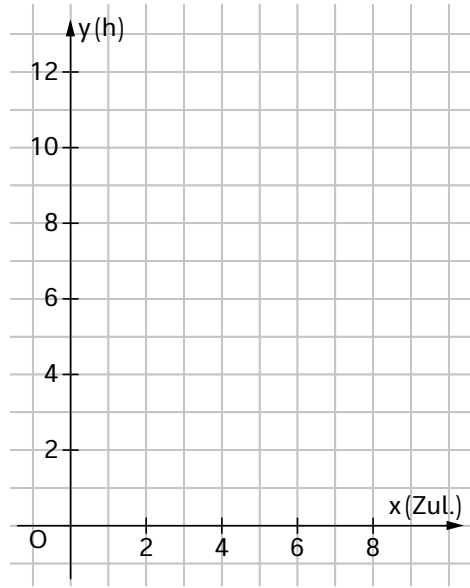
3



Ein Swimmingpool kann aus bis zu 6 gleich starken Zuläufen gefüllt werden. Wenn 3 Zuläufe geöffnet werden, dann dauert der Wassereinlauf 4 Stunden.

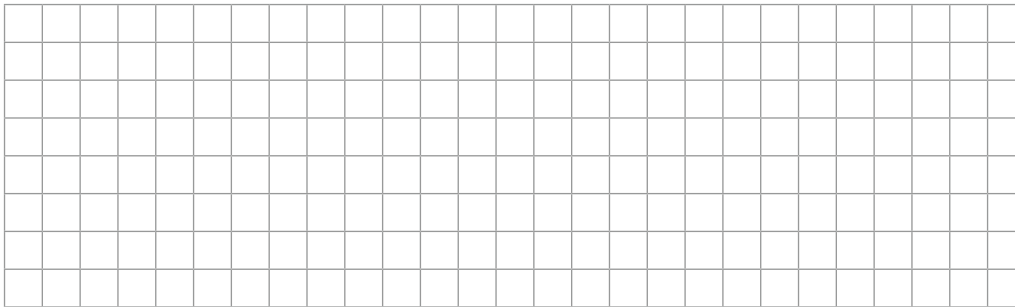
- a) Vervollständige die Wertetabelle, trage die Werte in das Achsenkreuz ein und verbinde die Punkte.

x (Zul.)	1	2	3	4	6
y (h)					



- b) Lies aus der Grafik ab, wie lange der Füllvorgang bei 5 Zuläufen etwa dauert.

- c) Der Swimmingpool soll durch 2 Zuläufe gefüllt werden. Nach der Hälfte der erforderlichen Zeit tritt ein Pumpenschaden auf, sodass die restliche Wassermenge von nur noch einem Zulauf geliefert werden kann. Berechne, wie lange der gesamte Füllvorgang nun dauert. Erläutere, was die Grafik in diesem Fall aussagt.



4

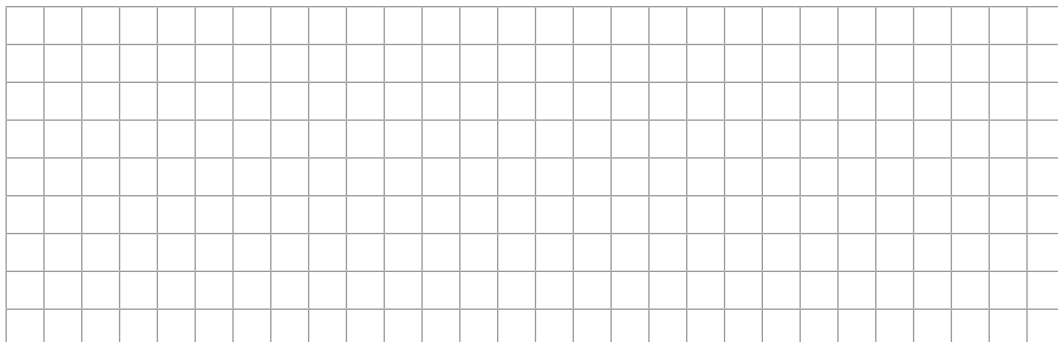


Wenn:  $\triangleq$  dann auch:  $\triangleq$ 

Löse die bildhaft dargestellte Aufgabe für den Fall

- a) der direkten Proportionalität.
b) der indirekten Proportionalität.

Beschreibe die Figuren durch Brüche.



Klassenarbeit Nr. 1

60 min
1 Setze ein:

* verdoppeln • halbieren • Wertetabelle • der Quotient $\frac{x}{y}$ • das Produkt $x \cdot y$ • direkte • indirekte • Hyperbel

Der Wert einer Größe x wird verdoppelt. Bei direkter Proportionalität muss sich der Wert von y _____. Bei indirekter Proportionalität muss sich der Wert von y _____. Die Zahlenpaare zweier Größen x und y werden in einer _____ notiert. Bei direkter Proportionalität muss _____ konstant sein, bei indirekter Proportionalität prüft man _____ auf Konstanz. Bei Darstellungen im Achsenkreuz erkennt man die _____ Proportionalität an einer Halbgeraden, die vom Ursprung aus verläuft und die _____ Proportionalität an einer Kurve, die _____ genannt wird.


2 Das Zahlenpaar $(10|8)$ gehört mit den Zahlenpaaren $(5|?)$, $(20|?)$, $(?|2)$, $(?|32)$ zu einer Zuordnung.

* Ergänze die Zahlenpaare so, dass sie zu

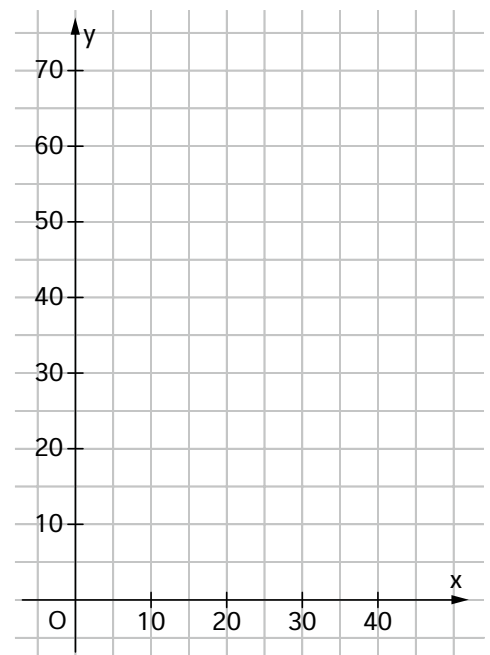
a) einer proportionalen

$(5| \quad)$, $(20| \quad)$, $(\quad| 2)$, $(\quad| 32)$

b) indirekt proportionalen Zuordnung gehören.

$(5| \quad)$, $(20| \quad)$, $(\quad| 2)$, $(\quad| 32)$

c) Stelle die Zuordnungen aus a) und b) grafisch dar.


3 Entscheide, ob es sich bei den Zuordnungen um eine proportionale (p), indirekt proportionale (ip) oder keine von beiden (x) handelt.

* *

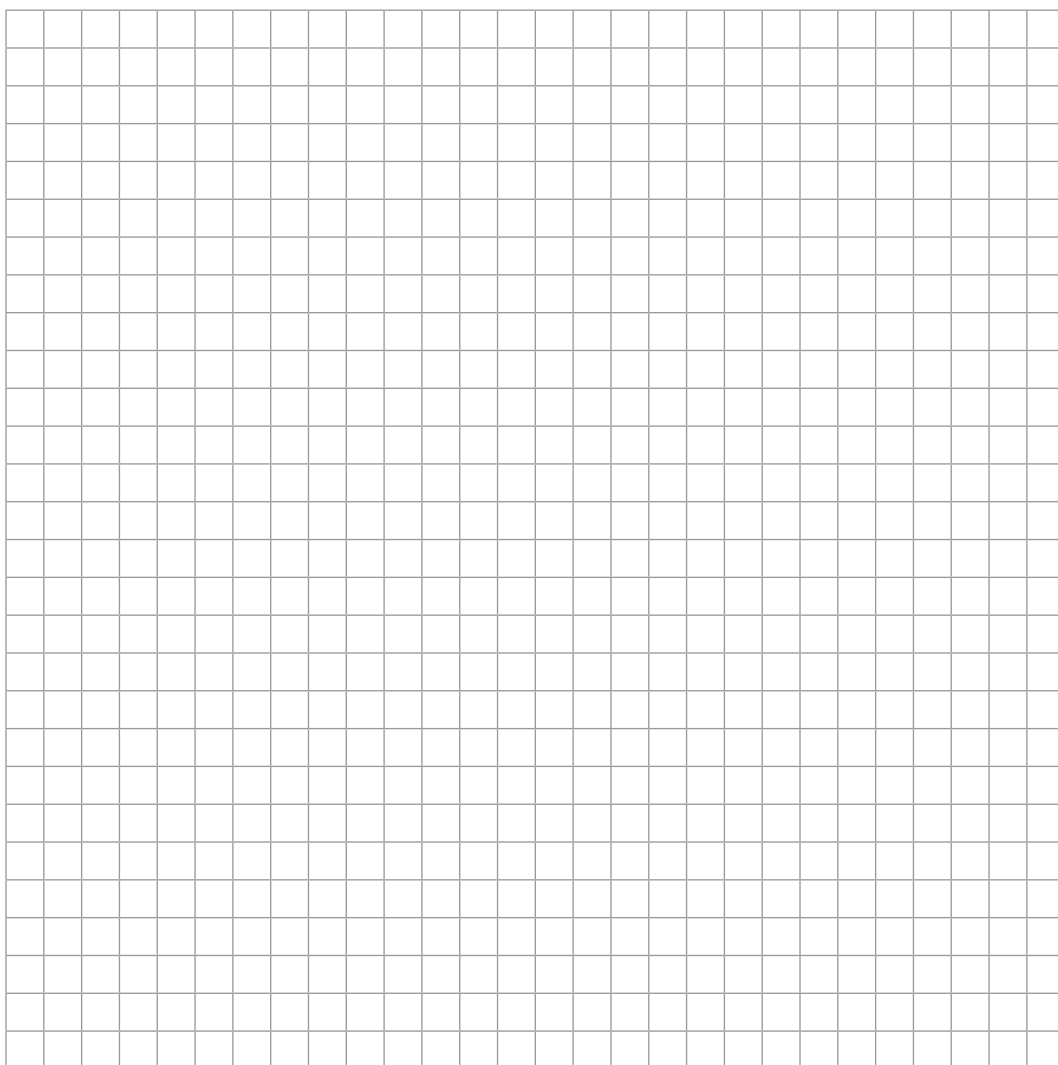
a) Der Preis für Salamiaufschnitt nach Gewicht.	p ☐ ip ☐ x ☐
b) Die Anzahl Handys pro Schüler einer Klasse.	p ☐ ip ☐ x ☐
c) Die Kosten für einen Reisebus (45 Sitze) pro Schüler.	p ☐ ip ☐ x ☐
d) Der Wert eines Stammbruches in Bezug auf die Größe des Nenners.	p ☐ ip ☐ x ☐
e) Anzahl der gleichschenkligen Dreiecke im Zusammenhang mit der Anzahl Ecken eines regelmäßigen Vielecks.	p ☐ ip ☐ x ☐



6

In einem Freizeitpark soll eine Geisterbahn gebaut werden.

- a) Die beauftragte Firma will 6 Arbeiter schicken, die bei einem 8h-Arbeitstag 12 Tage arbeiten müssten. Aufgrund einer Krankheitswelle in der Firma können zwei Arbeiter nicht mitkommen. Der Chef beschließt, dass die verbliebenen Arbeiter 1 h pro Tag Überstunden machen müssen.
Berechne, wie lange es dauert, bis die Geisterbahn fertig ist.
- b) Nach 4 Tagen beklagen sich die Arbeiter, dass sie zu wenige sind, um die Arbeit sinnvoll erledigen zu können. Daraufhin schickt ihnen der Chef drei zusätzliche Hilfsarbeiter zur Unterstützung und schafft die Überstunden wieder ab. Da die Hilfsarbeiter ungelernt sind, leisten sie nur $\frac{2}{3}$ von dem, was ein Geselle an einem Tag schafft.
Berechne, wie lange der Bau nun insgesamt dauert.



erreichte Punktzahl

/ 30

© Westermann