6 Abbildungen und Symmetrien

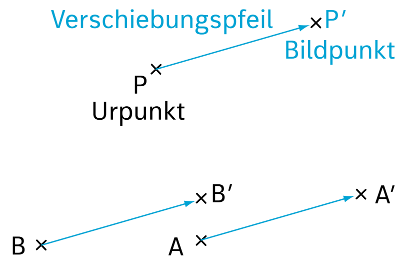
Abbildungen

Wird jedem Punkt der Zeichenebene durch eine Vorschrift eindeutig genau ein Punkt derselben Ebene zugeordnet, so spricht man von einer **Abbildung in der Ebene.** Urpunkte und Bildpunkte liegen dabei beide auf der Zeichenebene.

Zur Unterscheidung bezeichnet man die Urpunkte mit großen lateinischen Buchstaben, die zugehörigen Bildpunkte erhalten ein „′" (sprich: Strich") hinter den Buchstaben. Beispielsweise ist P′(„P-Strich") der Bildpunkt von P, B′ der abgebildete Punkt B. Bildet man den Bildpunkt P´nochmal ab, erhält man P″, nach einer weiteren Abbildung P‴ und so weiter.

Verschiebung

Wird jeder Punkt in dieselbe Richtung und um dieselbe Strecke verschoben, so heißt diese Abbildung Verschiebung. Der Pfeil von einem Punkt P (Urpunkt) zu seinem Bildpunkt P′ heißt **Verschiebungspfeil.** Alle Verschiebungspfeile einer Verschiebung sind parallel, gleich lang und haben dieselbe Richtung.

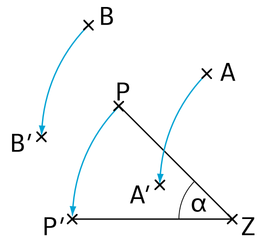


Durch ein einziges Punktepaar (z. B. A und A´) ist die Verschiebung eindeutig festgelegt.

Drehung

Wird jeder Punkt der Ebene um einen festen Punkt Z (Zentrum) mit demselben Winkel gedreht, so heißt die Abbildung Drehung um Z mit dem Drehwinkel α (auch Drehmaß α genannt). Da das Zentrum seine Lage nicht verändert, ist es ein sogenannter Fixpunkt. Es gilt stets $\overline{ZP} = \overline{ZP'}$.

Die Drehrichtung ist immer gegen den Uhrzeigersinn.



Durch das Drehzentrum Z und ein einziges Punktepaar (z. B. A und A′) ist die Drehung eindeutig festgelegt.

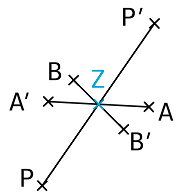
Zur Konstruktion von Drehungen ist ein Zirkel notwendig.

Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1

© Westermann

Punktspiegelung

Ein Punkt P der Ebene wird am festen Punkt Z (Zentrum) gespiegelt, indem man die Strecke $\overline{PZ}$ verdoppelt. Der Endpunkt dieser doppelten Strecke ist der Bildpunkt P′.

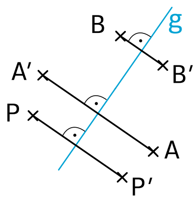


Damit ist Z immer genau die Mitte zwischen einem Urpunkt und seinem Bildpunkt, (also von A und A′, von B und B′ usw.).

Beispiel 1: In der Abbildung rechts wurden die Punkte A, B und P an Z gespiegelt.

Achsenspiegelung

Ein Punkt wird an der Geraden g (Spiegelachse) gespiegelt, indem man das Lot von P auf g fällt und diese Strecke verdoppelt.



Oder: P′ liegt auf der **orthogonalen Geraden** zu g durch P („auf der anderen Seite“) und hat denselben Abstand von g wie P von g.

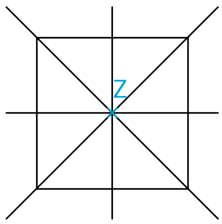
Beispiel 2: In der Grafik rechts wurden die Punkte A, B und P an der Geraden g gespiegelt.

Symmetrie in Figuren

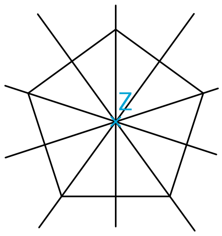
Eine Figur der Ebene, die durch eine Punktspiegelung, Achsenspiegelung oder Drehung auf sich selbst abgebildet werden kann, nennt man **symmetrisch.**

Je nach Abbildung ist die Figur dann **punktsymmetrisch** (Punktspiegelung), **achsensymmetrisch** (Achsenspiegelung) oder **drehsymmetrisch** (Drehung). Solche symmetrischen Figuren kannst du auch in der Natur finden (z. B. in Blüten, bei Blättern, in Schmetterlingsflügeln etc.). Mache Figuren vereinen sogar mehrere Symmetrien in sich.

Beispiel 3: a) Ein Quadrat ist punkt, achsen- und drehsymmetrisch (mit den Drehmaßen $\alpha = 90°$, $180°$ und $270°$).



b) Ein Pentagramm (regelmäßiges Fünfeck) ist sowohl achsensymmetrisch (fünf Symmetrieachsen) als auch drehsymmetrisch (Drehmaß $\alpha = 72°$).

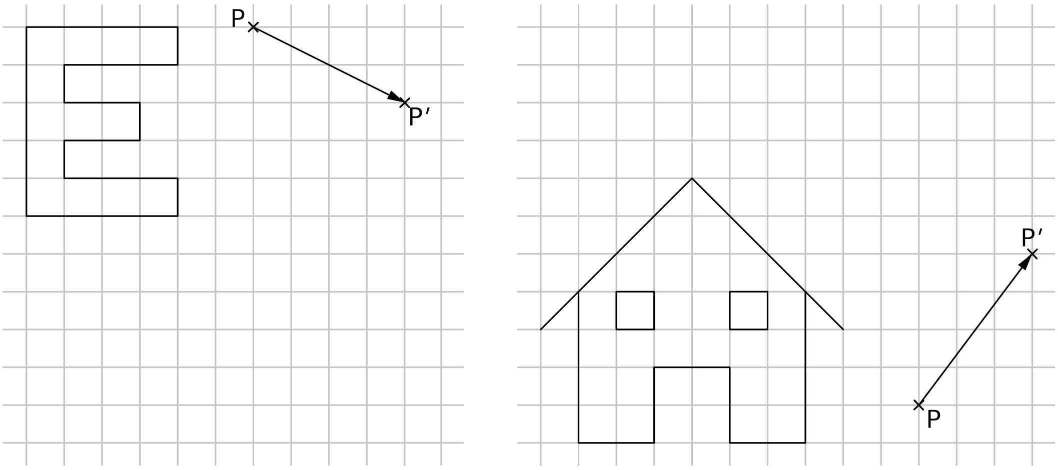


Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1

© Westermann

Test 1: Verschiebungen und Drehungen

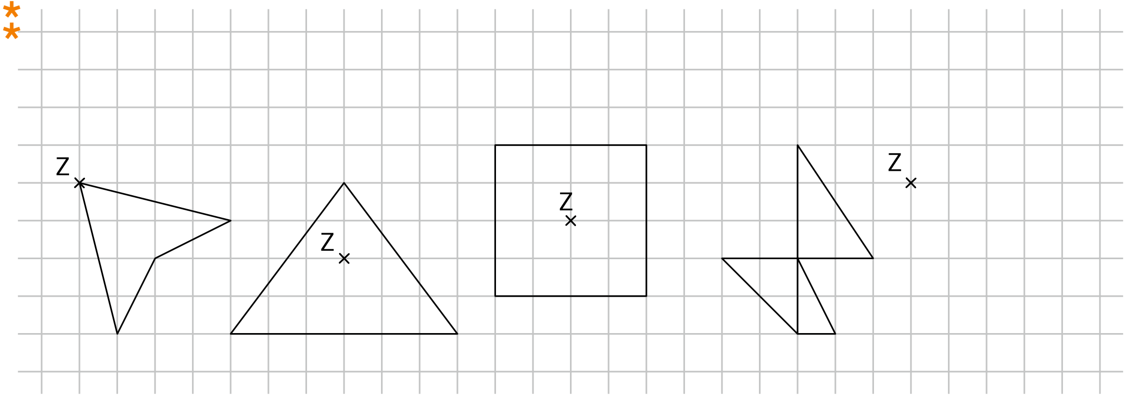
1 * Bilde die Figuren mit der angegebenen Verschiebung ab.



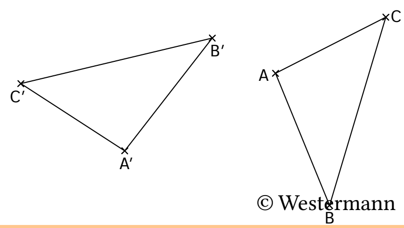
2 ** Jedes Punktepaar P und P′ beschreibt eine Verschiebung. Wie viele Schritte wurden nach rechts (r), links(l), oben (o) oder unten(u) gegangen? Bestimme dann den Bildpunkt A′ und den Urpunkt B.

P	(4|7)	(9|9)	(−2|4)	(0|−12)	(−5|0)	(5|−7)	(3|4)
P′	(7|3)	(−5|5)	(3|−4)	(−3|−3)	(−3|−2)	(5|7)	(3|4)
r/l							
o/u							
A	(0|0)	(1|−1)	(−1|1)	(1|1)	(−1|−1)	(−12|7)	(9|−7)
A′							
B							
B′	(0|0)	(1|−1)	(−1|1)	(1|1)	(−1|−1)	(−12|7)	(9|−7)

3 ** Drehe jede der Figuren am zugehörigen Zentrum Z um jeweils 90°.



4 ** Das Dreieck ABC rechts wurde durch eine Drehung auf A′B′C′ abgebildet. Gib das Zentrum und den Drehwinkel an.

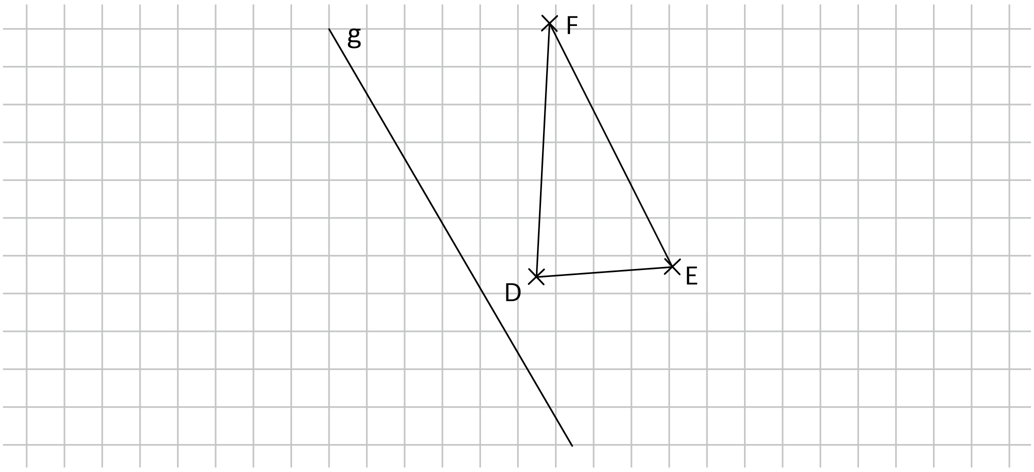


© Westermann

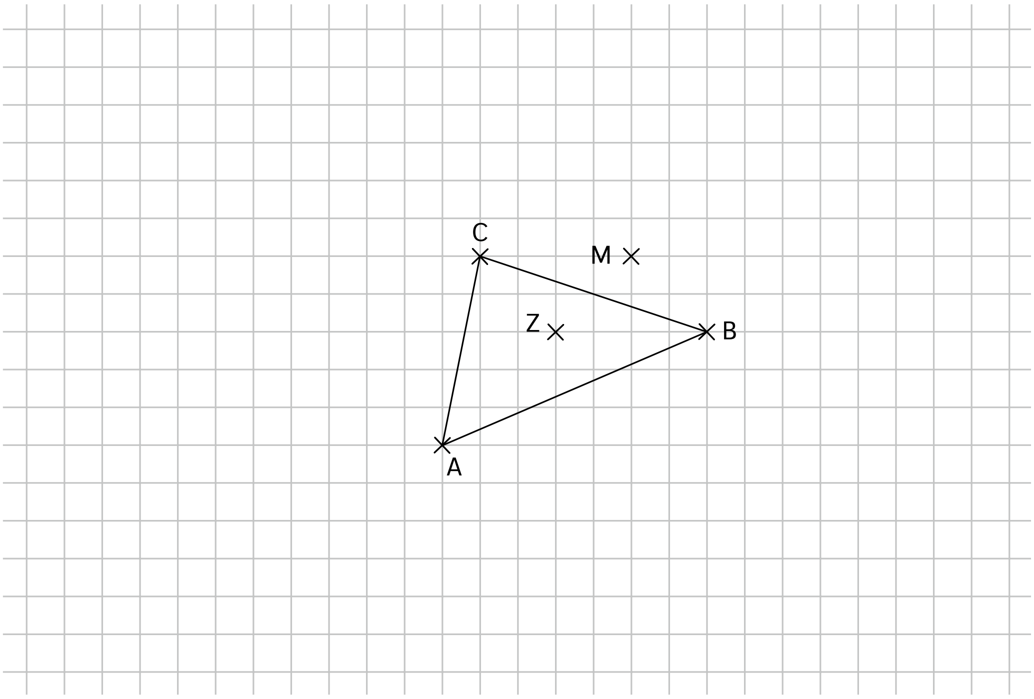
Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1

Test 2: Spiegelungen

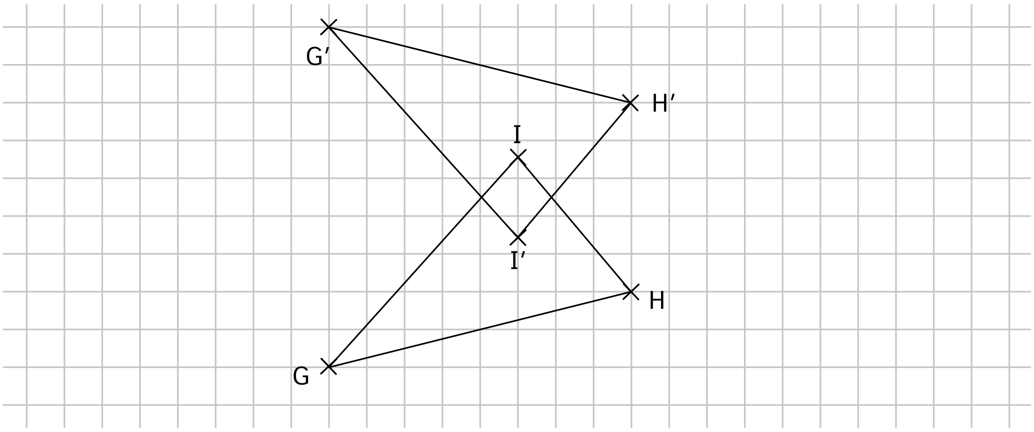
1 *
Spiegele das Dreieck DEF a der Geraden g.



2 **
Spiegele das Dreieck ABC an den Punkten Z, A und M.



3 *
G'H'I' entstand aus GHI durch eine Spiegelung. Trage die Spiegelachse ein.



© Westermann

Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1

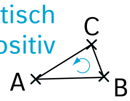
Test 3: Eigenschaften von Abbildungen

1 ** Entscheide, welche der Aussagen wahr (w) und welche falsch (f) sind. Überprüfe anhand selbstgewählter Beispiele. Nutze dafür dein Heft.

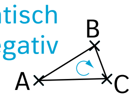
	w	f
a) Für zwei Verschiebungen V_1 und V_2 gilt: Es spielt keine Rolle, welche Verschiebung zuerst ausgeführt wird.		
b) Für zwei Drehungen D_1 und D_2 gilt: Es spielt keine Rolle, welche Drehung zuerst ausgeführt wird.		
c) Für zwei Punktspiegelungen S_1 und S_2 gilt: Es spielt keine Rolle, welche Punktspiegelung zuerst ausgeführt wird.		
d) Für zwei Achsenspiegelungen G_1 und G_2 gilt: Es spielt keine Rolle, welche Achsenspiegelung zuerst ausgeführt wird.		

2 ** Ein Dreieck ABC ist mathematisch positiv orientiert, wenn die Richtung von A über B nach C entgegen dem Uhrzeiger läuft, ansonsten ist das Dreieck mathematisch negativ orientiert. Gib an, welche der vier Abbildungen (Verschiebung, Drehung, Punktspiegelung, Geradenspiegelung) die Orientierung eines Dreiecks umkehrt.

mathematisch positiv



mathematisch negativ



3 * Wenn man ein beliebiges Dreieck abbildet, bleiben manche Eigenschaften des Dreiecks erhalten, andere ändern sich.
Kreuze in der Tabelle alle wahren Aussagen an.

Eigenschaften	Verschiebung	Drehung	Punktspiegelung	Geradenspiegelung
a) Flächeninhalt bleibt gleich.				
b) Winkelwerte bleiben gleich.				
c) Umlaufsinn bleibt gleich.				
d) Urseite und Bildseite sind parallel.				
e) Umfang bleibt gleich.				

4 *** Welche der Aussagen sind wahr (w), welche sind falsch (f)?

	w	f
a) Spiegelt man eine Figur zunächst an der Geraden g, dann das Bild an der Geraden h, so erhält man dasselbe Bild, als hätte man die Figur am Schnittpunkt der beiden Geraden g und h gespiegelt.		
b) Ein Dreieck kann durch eine Drehung immer so gedreht werden, dass eine Seite parallel zu einer Koordinatenachse ist.		

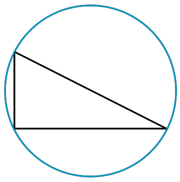
Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1

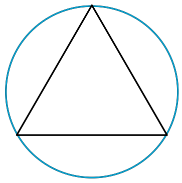
© Westermann

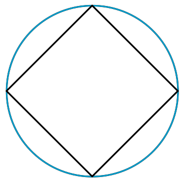
Test 4: Symmetrien

1 *

Untersuche die Figuren auf Symmetrie. Gib gegebenenfalls die Punkte bzw. Achsen an, zu denen die Figur symmetrisch ist. Gib außerdem das Drehzentrum und das Drehmaß an, falls eine Drehsymmetrie vorliegt.

a)

rechtwinkliges Dreieck

b)

gleichseitiges Dreieck

c)

Quadrat

____

____

____

2 **

Gegeben sind die Großbuchstaben des Alphabets und die Zahlen von 0 bis 9.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R

S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Gib an, welche der Buchstaben und Zahlen (in dieser Darstellung) punkt- und welche achsensymmetrisch sind.

Punktsymmetrisch sind: ______________________________

Achsensymmetrisch sind: ______________________________

3 ***

Welche der Aussagen sind wahr, welche falsch? Gib (in deinem Heft) Beispiele oder Gegenbeispiele an.

	w	f
a) Eine Figur kann nicht zu zwei verschiedenen Punkten punktsymmetrisch sein.		
b) Eine Figur kann nicht zu zwei verschiedenen Geraden achsensym-metrisch sein.		
c) Eine Figur kann punktsymmetrisch und achsensymmmetrisch sein.		

4 **

Gib alle zweistelligen Zahlen an, die achsensymmetrisch sind.

____

© Westermann

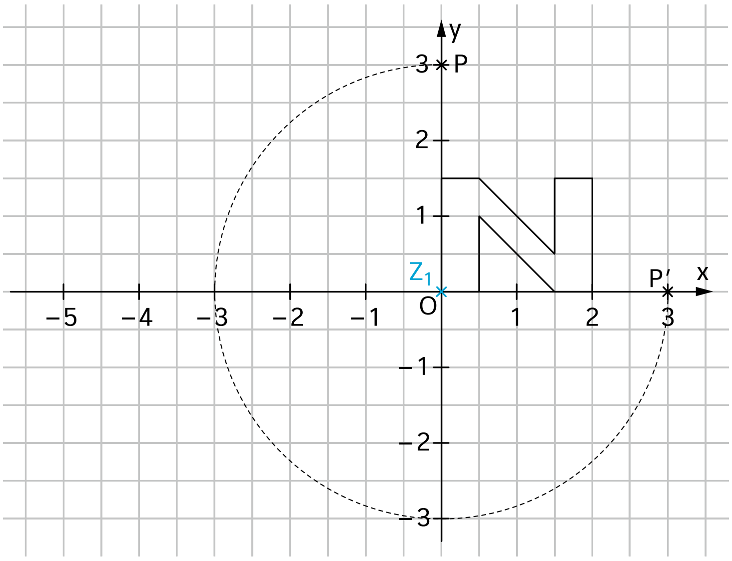
Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1

Klassenarbeit Nr. 6

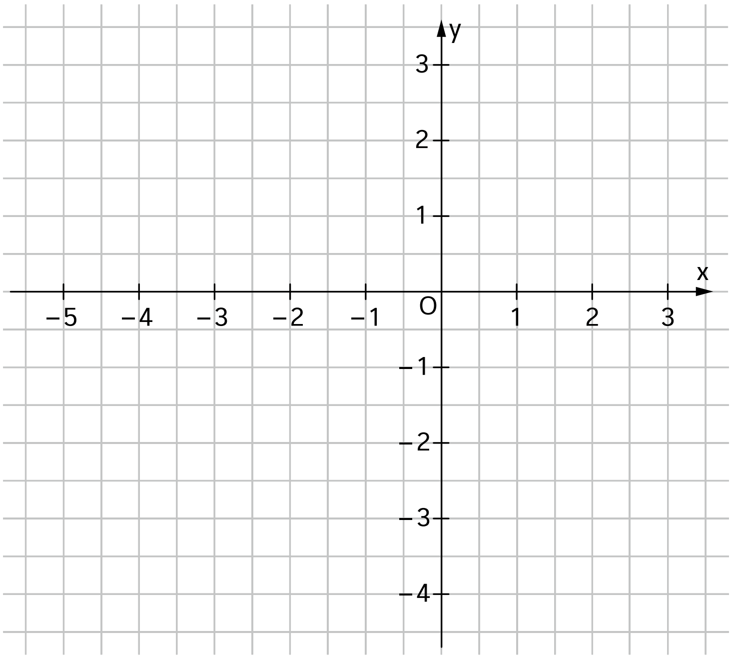
60 min

1 Gegeben sind zwei Drehungen:
- D_1 durch $Z_1(0|0)$ und $P(0|3) \rightarrow P'(3|0)$;
- D_2 durch $Z_2(-1|-2)$, Drehwinkel $\alpha_2 = 120°$.

a) Bilde durch jede der zwei Drehungen den dargestellten Buchstaben N im hier abgebildeten Koordinatensystem ab. Verwende verschiedene Farben.



b) Zeichne in das untere Koordinatensystem. Bilde das Dreieck ABC mit $A(-2|-2)$, $B(2|0)$ und $C(-1|1)$ über D_1 vor D_2 (erst D_1, dann D_2) auf das Dreieck A″B″C″ ab.



c) Bilde den Punkt $A(-2|-1)$ über D_2 vor D_1 ab. Vergleiche mit A″ der Teilaufgabe b). Was fällt dir auf?

____

____

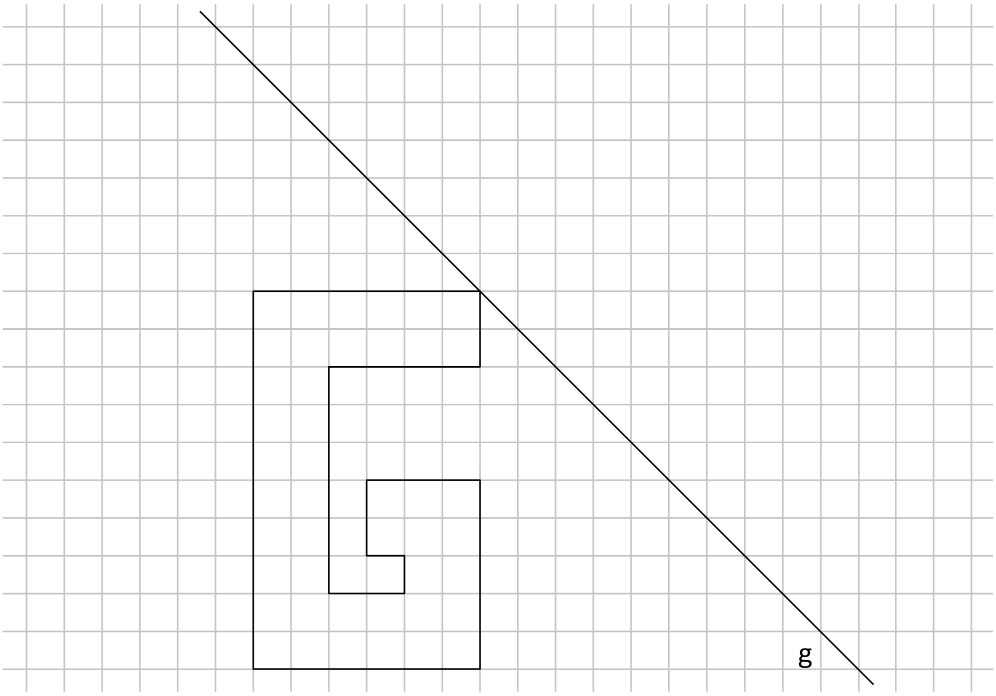
/9

© Westermann

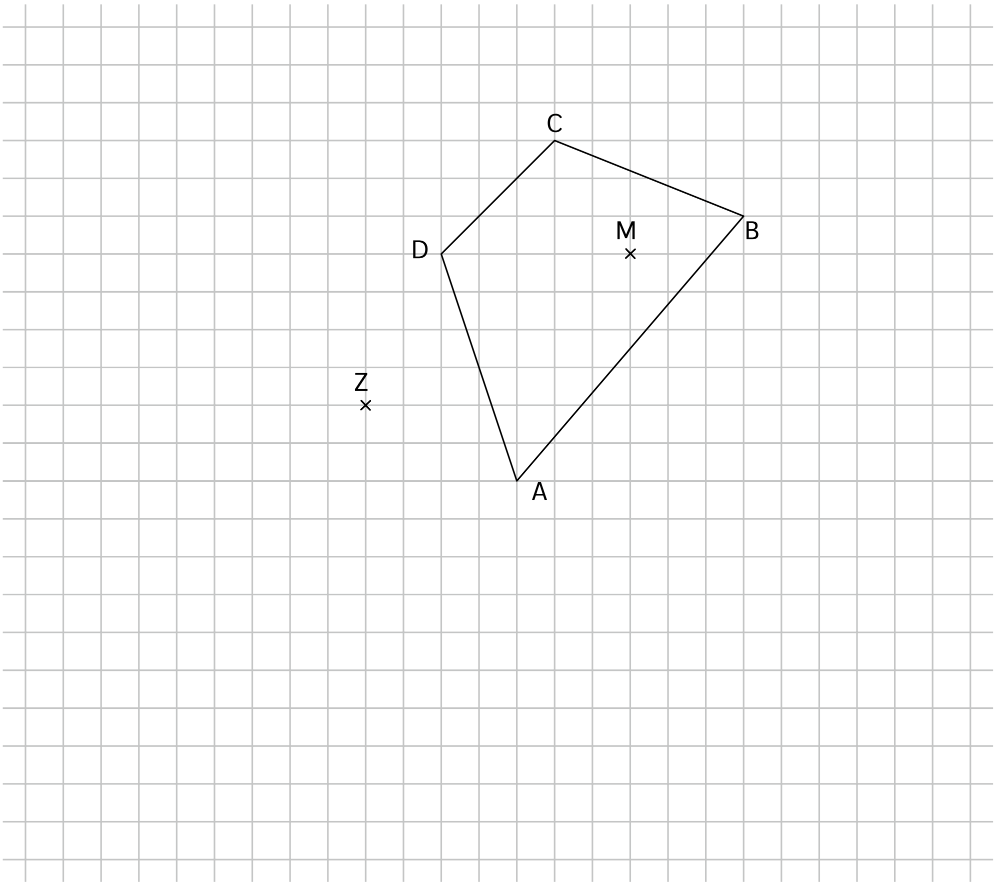
Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1

2 Spiegele die Figuren

* a) an der Geraden g.



b) an Z, M und A.



/10

Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1

© Westermann

3 *
Die beiden oberen Punktepaare P und P′ beschreiben eine Verschiebung im Koordinatensystem.
Gib an, ob du nach rechts (r), links (l), oben (o) oder unten (u) gegen musst und um wie viele Gitterschritte. Bestimme dann den Bildpunkt A′ und den Urpunkt B.

P	(0|0)	(3|−1)	(−5|−7)
P′	(2|2)	(0|0)	(−2|−5)
r/l			
o/u			
A	(−22|3)	(5|12)	(2|22)
A′			
B			
B′	(22|3)	(5|12)	(2|22)

/6

4 ***
Welches Drehmaß hat die Umstellung des Stundenzeigers einer Uhr, wenn wir nach Portugal (−1 h im Vergleich zu Deutschland), bzw. nach Los Angeles (−9 h) fliegen?

© Westermann

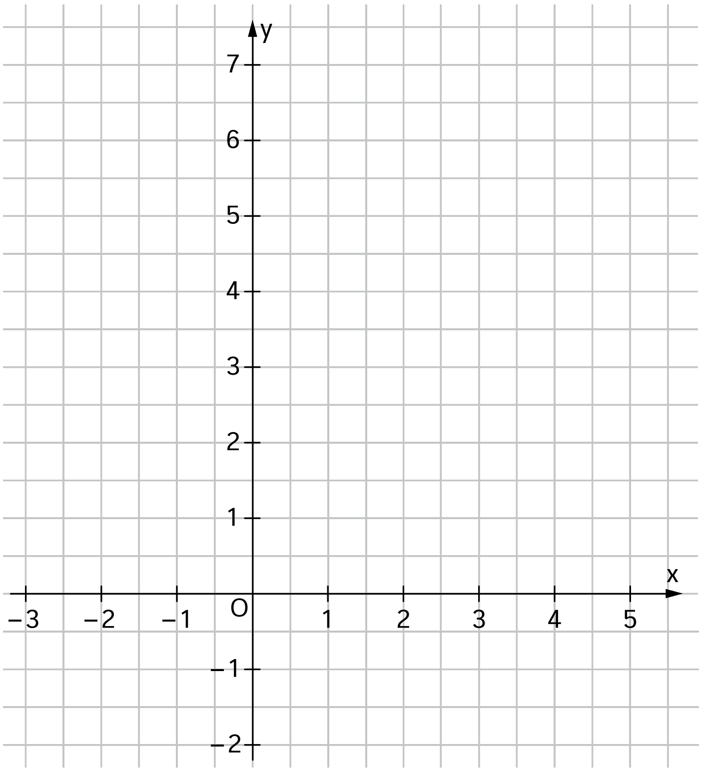
/2

Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1

5 ★★ Gegeben ist die Verschiebung V durch P (3|−2) → P′(−2|1) und die Drehung D durch Z (1|1) und α = 100°. Bilde den Punkt F (4|−1) ab, indem du

a) zuerst die Verschiebung und dann die Drehung ausführst.

b) zuerst die Drehung und dann die Verschiebung ausführst.



/3

6 ★★ Ordne den Figuren die richtigen Symmetrieeigenschaften zu.

1. Kreis	a) 2 Spiegelachsen 1 Drehzentrum (α = 180°) 1 Spiegelzentrum
2. Parallelogramm	b) beliebig viele Spiegelachsen 1 Drehzentrum mit beliebigem Drehsinn 1 Spiegelzentrum
3. gleichschenkliges Trapez	c) 6 Spiegelachsen 1 Drehzentrum (α = 60°) 1 Spiegelzentrum
4. Raute	d) 1 Drehzentrum (α = 180°) 1 Spiegelzentrum
5. regelmäßiges Sechseck	e) 1 Spiegelachse

/5

erreichte Punktzahl

/35

© Westermann

Aus: **Fit für die Klassenarbeit** Mathematik, 6. Klasse Gymnasium, ISBN: 978-3-07-003064-1