Übersicht zu den linearen Gleichungssystemen

LGS-Typ	Lösungsvorschlag	typisches Auftreten	Beispiel
1 Gleichung **1 Variable**	Ordnen, gegebenenfalls Variable ausklammern und die Variablen berechnen.	Schnitt Gerade-Ebene in Koordinatenform	E: $2x_1-2x_2-x_3=0$; g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow 2(2+4t)-2(-5-2t)-(3+t)=0$ $\Rightarrow t=-1 \Rightarrow S(-2\mid-3\mid2)$
1 Gleichung **2 Variablen**	Ordnen, eine der Variablen isolieren und berechnen (in Abhängigkeit zu der anderen Variablen).	Schnitt Ebene in Vektorform mit Ebene in Koordinatenform	E_1: $2x_1+x_2+3x_3-12=0$ E_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\7\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-5\\9\end{pmatrix}$ $\Rightarrow 2(-r+3s)+(-2-3r-5s)$ $+3(7+4r+9s)-12=0$ $\Rightarrow r=-4s-1 \Rightarrow$ g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}7\\7\\-7\end{pmatrix}$
1 Gleichung **3 Variablen**	Zwei der Variablen beliebig (aber sinnvoll) einsetzen und die dritte Variable berechnen.	Aufsuchen von Punkten auf einer Ebene in Koordinatenform, Vektor orthogonal zum gegebenen Vektor	E_1: $2x_1+x_2+3x_3-12=0$ mit $x_2=1$, $x_3=5$ $\Rightarrow P(-2\mid1\mid5)$; $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\Rightarrow a+2b+3c=0$ mit $a=1$, $b=2 \Rightarrow c=-\frac{5}{3}$
2 Gleichungen **1 Variable**	Aus 1. Gleichung Variable berechnen und das Ergebnis in die 2. einsetzen.	bei drei Gleichungen und zwei Variablen	$2x-3=5$; $-x+4=9$ aus Gleichung 1 $\Rightarrow$ $x=4$ eingesetzt $\Rightarrow -4+4=9$ also $0=9$ und damit keine Lösung
2 Gleichungen **2 Variablen**	Eine Variable eliminieren, die andere Variable berechnen.	häufigstes LGS der Analysis, z. B. Schnitt zweier Geraden	$y=2x+4$; $y=-x+5$ $\Rightarrow 2x+4=-x+5 \Rightarrow 3x=1$ $\Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{14}{3} \Rightarrow S\left(\frac{1}{3}\mid\frac{14}{3}\right)$
2 Gleichungen **3 Variablen**	Eine Variable eliminieren, ergibt eine Gleichung mit zwei Variablen. Dann Bestimmung einer Variablen in Abhängigkeit der anderen.	Schnitt zweier Ebenen in Koordinatenform, Bestimmung eines Normalenvektors einer Ebene in Vektorform	E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $3n_1+n_2-n_3=0$ $n_1-n_2-n_3=0$ $\Rightarrow 2n_1+2n_2=0 \Rightarrow n_2=-n_1$; $n_3=2n_1$
3 Gleichungen **1 Variablen**	Aus einer Gleichung die Variable berechnen und in beide anderen Gleichungen einsetzen. Lösung nur, wenn alle Gleichungen erfüllt sind.	Nachprüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Geraden liegt.	$P(2\mid-1\mid3)$; g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{ll}(1) & 2=1-2t\\(2) & -1=2+t\\(3) & 3=3+4t\end{array}\right\}\Rightarrow$ keine Lösung
3 Gleichungen **2 Variablen**	Aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen die Variablen berechnen und in die dritte Gleichung einsetzen.	Schnitt zweier Geraden, lineare Unabhängigkeit dreier Vektoren	$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll}(1) & 3+t=4-s\\(2) & -2+2t=-2s\\(3) & 1-3t=2+s\end{array}\right\}\Rightarrow s=2,\ t=-1$
3 Gleichungen **3 Variablen**	Durch Eliminieren der Variablen über zwei Gleichungen mit zwei Variablen auf eine mit einer Variablen.	Schnitt Gerade mit Ebene in Vektorform, Gleichungssysteme bei Basiswechsel	$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll}(1) & 3+r+3s=-t\\(2) & 3+r-3s=2-3t\\(3) & 1-r-s=7+4t\end{array}\right\}\Rightarrow t=-\frac{11}{7}$
3 Gleichungen **4 Variablen**	Über zwei Gleichungen mit drei Variablen und eine Gleichung mit zwei Variablen.	Schnitt zweier Ebenen in Vektordarstellung	$3+r+3s=-u+3v$ $3+r-3s=-2-3u-5v$ $1-r-s=7+4u+9v$ $v\in\mathbb{R}$; $s=0$; $r=-2+7v$; $u=-1-4v$

Tab. 6.1: Lineare Gleichungssysteme im Überblick