

Klaus Schilling

# **Analysis**

## **– Einführungs- und Qualifikationsphase**

**Ein Lehr-/Lernbuch für die Fachgymnasien, die Beruflichen  
Gymnasien, die gymnasiale Oberstufe, die Abendgymnasien  
und das Kolleg**

7. Auflage

Bestellnummer 32300

 **Bildungsverlag EINS**

Die in diesem Produkt gemachten Angaben zu Unternehmen (Namen, Internet- und E-Mail-Adressen, Handelsregistereintragungen, Bankverbindungen, Steuer-, Telefon- und Faxnummern und alle weiteren Angaben) sind i. d. R. fiktiv, d. h., sie stehen in keinem Zusammenhang mit einem real existierenden Unternehmen in der dargestellten oder einer ähnlichen Form. Dies gilt auch für alle Kunden, Lieferanten und sonstigen Geschäftspartner der Unternehmen wie z. B. Kreditinstitute, Versicherungsunternehmen und andere Dienstleistungsunternehmen. Ausschließlich zum Zwecke der Authentizität werden die Namen real existierender Unternehmen und z. B. im Fall von Kreditinstituten auch deren IBANs und BICs verwendet.

Die in diesem Werk aufgeführten Internetadressen sind auf dem Stand zum Zeitpunkt der Drucklegung. Die ständige Aktualität der Adressen kann vonseiten des Verlages nicht gewährleistet werden. Darüber hinaus übernimmt der Verlag keine Verantwortung für die Inhalte dieser Seiten.

Ein Lösungsbuch mit ausführlichen Lösungshinweisen ist **auch für Schüler** erhältlich unter der **Bestellnummer 32399**.

**service@bv-1.de**  
**www.bildungsverlag1.de**

Bildungsverlag EINS GmbH  
Ettore-Bugatti-Straße 6-14, 51149 Köln

ISBN 978-3-441-32300-6

© Copyright 2016: Bildungsverlag EINS GmbH, Köln  
Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.  
Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

# Vorwort

Bei der Erstellung dieses Schulbuches wurde besonderer Wert auf eine für Schülerinnen und Schüler **anschauliche und verständliche Darstellung** der mathematischen Inhalte und Verfahren gelegt, damit die Schülerinnen und Schüler mit diesem Schulbuch **eigenständig** im Unterricht und zu Hause arbeiten können. Zahlreiche durchgerechnete Aufgabenbeispiele mit ausführlichen Erklärungen unterstützen diese Intention.

Die **Aufgaben mit Lösungen** sind mit dem nebenstehenden Symbol und einem blauen Streifen markiert.



Die zahlreichen **Übungsaufgaben** zur Verfestigung des Stoffes werden durch das nebenstehende Symbol in einem grünen Streifen gekennzeichnet.



Im Abschnitt „Finanzmathematik“ sind zahlreiche Aufgaben praxisnah mit einem Tabellenkalkulationsprogramm zu lösen. Das EXCEL-Symbol am Rand soll die Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms anzeigen.



Ich wünsche allen Schülerinnen und Schülern, die mit diesem Buch arbeiten, viel Erfolg und Freude an der Mathematik.

*Der Verfasser*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Mathematische Zeichen und Symbole</b> .....	8
<b>Aufbau des Zahlensystems</b> .....	10
<b>1 Funktionenlehre</b> .....	12
<b>1.1 Funktionen</b> .....	12
1.1.1 Definition und Begriffe .....	12
1.1.2 Bedeutung von Funktionen.....	17
<b>1.2 Lineare Funktionen</b> .....	18
1.2.1 Bedeutung der Variablen $m$ und $b$ in $f(x) = mx + b$ .....	18
1.2.2 Konstruktion des Funktionsgraphen .....	20
1.2.3 Bestimmung der Funktionsgleichung .....	22
1.2.4 Sonderfälle .....	23
1.2.5 Anwendungsbeispiele.....	24
<b>1.3 Lineare Gleichungssysteme</b> .....	27
1.3.1 Lösungsmengen .....	27
1.3.2 Lösungsverfahren.....	29
<b>1.4 Quadratische Funktionen</b> .....	34
1.4.1 Normalparabel (Öffnung – Dehnung/Stauchung) .....	35
1.4.2 Verschiebung .....	36
1.4.3 Scheitelpunktform .....	37
1.4.4 Polynomdarstellung – Scheitelpunktform.....	39
1.4.5 Nullstellenberechnung .....	40
1.4.6 Linearfaktordarstellung.....	43
1.4.7 Schnittprobleme.....	44
<b>1.5 Potenzfunktionen</b> .....	49
1.5.1 $f(x) = x^n$ mit geraden Exponenten .....	49
1.5.2 $f(x) = x^n$ mit ungeraden Exponenten .....	49
1.5.3 $f(x) = ax^n + b$ .....	50
<b>1.6 Ganzrationale Funktionen</b> .....	51
1.6.1 Verlauf der Graphen für $x \rightarrow \pm \infty$ .....	52
1.6.2 Linearfaktordarstellung.....	53
1.6.3 Nullstellenberechnung .....	56
<b>1.7 Gebrochenrationale Funktionen</b> .....	63
1.7.1 Definitionsbereich/Definitionslücken .....	66
1.7.2 Nullstellen .....	72
1.7.3 Asymptoten .....	73

<b>1.8</b>	<b>Weitere Funktionen</b> .....	78
1.8.1	Betragsfunktionen .....	78
1.8.2	Umkehrfunktionen .....	80
1.8.3	Wurzelfunktionen .....	84
1.8.4	Trigonometrische Funktionen .....	90
1.8.4.1	Die Sinusfunktion .....	90
1.8.4.2	Die Kosinusfunktion .....	92
1.8.4.3	Die Tangensfunktion .....	93
1.8.4.4	Die Kotangensfunktion .....	94
1.8.4.5	Veränderungen des Graphen der Sinusfunktion .....	96
1.8.5	Exponentialfunktionen .....	100
1.8.6	Logarithmusfunktionen .....	107
1.8.7	Verkettete Funktionen .....	111
<b>1.9</b>	<b>Allgemeine Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen</b> ...	114
1.9.1	Monotonie .....	114
1.9.2	Beschränktheit .....	116
1.9.3	Symmetrie .....	117
<b>2</b>	<b>Differenzialrechnung</b> .....	120
<b>2.1</b>	<b>Grenzwerte von Funktionen</b> .....	120
2.1.1	Verhalten von Funktionen bei Annäherung an eine Stelle $x_a$ .....	121
2.1.2	Verhalten von Funktionen im „Unendlichen“ .....	126
2.1.3	Berechnung von Grenzwerten .....	130
<b>2.2</b>	<b>Ableitung</b> .....	133
2.2.1	Steigung eines Funktionsgraphen .....	133
2.2.2	Das Tangentenproblem .....	136
2.2.3	Steigung eines Funktionsgraphen in einem bestimmten Punkt .....	138
<b>2.3</b>	<b>Ableitungsfunktionen</b> .....	143
2.3.1	Steigung eines Funktionsgraphen in einem beliebigen Punkt .....	143
2.3.2	Ableitung der Potenzfunktionen .....	146
2.3.3	Ableitung der ganzrationalen Funktionen .....	149
2.3.4	Ableitung der Betragsfunktionen .....	153
2.3.5	Ableitung der Produktfunktionen .....	156
2.3.6	Ableitung der Wurzelfunktionen .....	159
2.3.7	Ableitung der gebrochenrationalen Funktionen .....	162
2.3.8	Ableitung der trigonometrischen Funktionen .....	169
2.3.8.1	Ableitung der Sinusfunktion .....	169
2.3.8.2	Ableitung der Kosinusfunktion .....	171
2.3.8.3	Ableitung der Tangensfunktion .....	172
2.3.8.4	Ableitung der Kotangensfunktion .....	173
2.3.8.5	Ableitung trigonometrisch verketteter Funktionen .....	174
2.3.9	Ableitung der Exponentialfunktionen .....	176
2.3.10	Ableitung der Logarithmusfunktionen .....	179
<b>2.4</b>	<b>Zusammenhänge zwischen Graphen von Funktionen und deren Ableitungsfunktionen</b> .....	182
2.4.1	Höhere Ableitungen .....	183
2.4.2	Extrempunkte .....	189

2.4.2.1	Zur Terminologie . . . . .	189
2.4.2.2	Berechnung lokaler Extrempunkte . . . . .	190
2.4.3	Wendepunkte und Sattelpunkte . . . . .	199
<b>2.5</b>	<b>Untersuchung von Funktionen und ihren Graphen . . . . .</b>	<b>205</b>
2.5.1	Kurvendiskussion der ganzrationalen Funktionen . . . . .	205
2.5.2	Kurvendiskussion der gebrochenrationalen Funktionen . . . . .	212
2.5.3	Kurvendiskussion der Wurzelfunktionen . . . . .	219
2.5.4	Kurvendiskussion der Exponentialfunktionen . . . . .	225
2.5.5	Kurvendiskussion der Logarithmusfunktionen . . . . .	233
2.5.6	Kurvendiskussion der trigonometrischen Funktionen . . . . .	237
<b>2.6</b>	<b>Anwendungen der Differenzialrechnung . . . . .</b>	<b>241</b>
2.6.1	Bestimmung von ganzrationalen Funktionsgleichungen mit vorgegebenen Eigenschaften . . . . .	241
2.6.2	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	250
2.6.3	Wirtschaftstheoretische Anwendungen . . . . .	263
2.6.3.1	Kostenfunktionen . . . . .	263
2.6.3.2	Erlösfunktionen . . . . .	270
2.6.3.3	Gewinnfunktionen . . . . .	272
<b>2.7</b>	<b>Folgen und Reihen . . . . .</b>	<b>276</b>
2.7.1	Begriff der Folge . . . . .	276
2.7.2	Arithmetische und geometrische Folgen . . . . .	278
2.7.2.1	Arithmetische Folgen . . . . .	278
2.7.2.2	Geometrische Folgen . . . . .	280
2.7.3	Arithmetische und geometrische Reihen . . . . .	282
2.7.3.1	Arithmetische Reihen . . . . .	282
2.7.3.2	Geometrische Reihen . . . . .	284
<b>2.8</b>	<b>Finanzmathematik (mit EXCEL) . . . . .</b>	<b>288</b>
2.8.1	Einfache Zinsrechnung . . . . .	288
2.8.2	Zinseszinsrechnung . . . . .	293
2.8.3	Gemischte Zinsrechnung . . . . .	298
2.8.4	Unterjährliche Verzinsung . . . . .	303
2.8.5	Rentenrechnung (jährlich) . . . . .	308
2.8.6	Rentenrechnung (unterjährlich) . . . . .	316
2.8.7	Kapitalaufbau/Kapitalabbau . . . . .	321
2.8.8	Tilgungsrechnung . . . . .	326
2.8.8.1	Ratentilgung . . . . .	327
2.8.8.2	Annuitätentilgung . . . . .	329
2.8.9	Abschreibung . . . . .	333
2.8.9.1	Lineare Abschreibung . . . . .	333
2.8.9.2	Degressive Abschreibung . . . . .	338
2.8.9.3	Wechsel von der degressiven zur linearen Abschreibung . . . . .	340
<b>2.9</b>	<b>Weiterführung der Differenzialrechnung . . . . .</b>	<b>345</b>
2.9.1	Stetigkeit . . . . .	346
2.9.2	Differenzierbarkeit . . . . .	354
2.9.3	Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	357
2.9.4	Kurvenscharen . . . . .	362
2.9.5	Ortslinien . . . . .	368

<b>3</b>	<b>Integralrechnung</b> .....	371
3.1	<b>Stammfunktionen/Unbestimmtes Integral</b> .....	371
3.2	<b>Flächeninhaltsfunktion</b> .....	375
3.3	<b>Das bestimmte Integral</b> .....	383
3.4	<b>Das Integral als Flächenmaß</b> .....	388
3.5	<b>Anwendungen der Integralrechnung</b> .....	393
3.6	<b>Integrierbarkeit</b> .....	399
3.7	<b>Weiterführung der Integralrechnung</b> .....	404
3.7.1	Grundintegrale .....	404
3.7.2	Integrationsverfahren .....	405
3.7.2.1	Integration durch Substitution .....	405
3.7.2.2	Integration durch Zerlegung in Partialbrüche .....	410
3.7.2.3	Produktintegration (Partielle Integration) .....	413
3.7.2.4	Vermischte Übungen zu den verschiedenen Integrationsverfahren .....	416
3.7.3	Uneigentliche Integrale .....	418
3.7.4	Rotationsvolumina .....	423
3.7.5	Bogenlängen .....	429
3.7.6	Mantelflächen .....	432
<b>4</b>	<b>Übergreifende Aufgaben zur Differenzial- und Integralrechnung</b> .....	435
4.1	<b>Ganzrationale Funktionen</b> .....	435
4.2	<b>Gebrochenrationale Funktionen</b> .....	440
4.3	<b>Wurzelfunktionen</b> .....	447
4.4	<b>Exponentialfunktionen</b> .....	451
4.5	<b>Logarithmusfunktionen</b> .....	455
4.6	<b>Trigonometrische Funktionen</b> .....	461
4.7	<b>Aufgaben mit verschiedenen Funktionsarten</b> .....	465
	<b>Bildquellenverzeichnis</b> .....	470
	<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	471

# Mathematische Zeichen und Symbole

Zeichen, Symbol	Sprechweise/Bedeutung	Beispiel
=	gleich	$4 = 4$
$\neq$	ungleich	$3 \neq 4$
$\approx$	ist ungefähr gleich	$\sqrt{2} \approx 1,41$
$<$	kleiner als	$3 < 4$
$>$	größer als	$5 > 4$
$\leq$	kleiner gleich	$x \leq 3$
$\geq$	größer gleich	$x \geq 4$
$  $	Betrag von	$ -3  = 3$
$\infty$	unendlich	
$\Rightarrow$	daraus folgt	$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\} \Rightarrow \{1\} \in \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow$	gilt genau dann, wenn; ist äquivalent mit	$2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$
$\wedge$	und	
$\vee$	oder	
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen <b>einschließlich</b> der Zahl <b>0</b>	$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen <b>einschließlich</b> der Zahl <b>0</b>	$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen <b>einschließlich</b> der Zahl <b>0</b>	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}^*\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen <b>einschließlich</b> der Zahl <b>0</b>	
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$	Zahlen der Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ <b>ohne</b> die Zahl <b>0</b>	$\mathbb{Z}^* = \{\dots; -3; -2; -1; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$	positive Zahlen der Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ <b>einschließlich</b> der Zahl <b>0</b>	$\mathbb{Z}_+ = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}_+^*, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{R}_+^*$	positive Zahlen der Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ <b>ohne</b> die Zahl <b>0</b>	$\mathbb{Z}_+^* = \{1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}_-, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_-$	negative Zahlen der Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ <b>einschließlich</b> der Zahl <b>0</b>	$\mathbb{Z}_- = \{\dots; -3; -2; -1; 0\}$
$\mathbb{Z}_-^*, \mathbb{Q}_-^*, \mathbb{R}_-^*$	negative Zahlen der Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ <b>ohne</b> die Zahl <b>0</b>	$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots; -3; -2; -1\}$
$\{1; 2; 3\}$	Menge mit den Elementen 1, 2, 3	$A = \{1; 2; 3\}$
$\{x \mid \dots\}$	Menge aller $x$ für die gilt ...	$D = \{x \mid 0 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$
$\{(x; y) \mid \dots\}$	Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$ für die gilt ...	$\{(x; y) \mid y = 3x\}$
$\emptyset = \{ \}$	leere Menge	$\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{N}^* = \emptyset = \{ \}$
$\in$	Element von	$\{1\} \in \mathbb{N}$
$\notin$	nicht Element von	$\{-1\} \notin \mathbb{N}$

Zeichen, Symbol	Sprechweise/Bedeutung	Beispiel
$\cup$	vereinigt mit	$\mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}$
$\cap$	geschnitten mit	$\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$
$\subset$	ist echte Teilmenge von	$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
$\setminus$	ohne	$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$
$[a; b]$	geschlossenes Intervall (von einschließlich $a$ bis einschließlich $b$ )	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$
$(a; b)$	offenes Intervall (von ausschließlich $a$ bis ausschließlich $b$ )	$\{x \mid a < x < b\}$
$[a; b)$	halb offenes Intervall (von einschließlich $a$ bis ausschließlich $b$ )	$\{x \mid a \leq x < b\}$
$(a; b]$	halb offenes Intervall (von ausschließlich $a$ bis einschließlich $b$ )	$\{x \mid a < x \leq b\}$
$P(x/y)$	Punkt $P$ mit den Koordinaten $(x/y)$	$P(1/3)$
$f: f(x) = \dots$	eine Funktion $f$ mit der Funktionsgleichung $f(x) = \dots$	$f: f(x) = 3x$
$\langle a_n \rangle$	Folge $a_n$	$\langle a_n \rangle: 1; 4; 9; 16; \dots$
$f$	reelle Funktion	$f: f(x) = x^2$
$\mapsto$	wird zugeordnet	$x \mapsto f(x)$
$f^{-1}$	Umkehrfunktion	$f: f(x) = 2x \Rightarrow f^{-1}: f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$
$f^*$	Asymptotenfunktion	für $f: f(x) = \frac{1}{x}$ ist $f^*: f^*(x) = 0$
$g \circ h$	$g$ verkettet mit $h$ (verkettete Funktion)	$f = g \circ h : f(x) = g[h(x)]$
$D(f)$	Definitionsbereich, Definitionsmenge einer Funktion $f$	$D(f) = \mathbb{R}_{\neq}^{\neq}$
$W(f)$	Wertebereich, Wertemenge einer Funktion $f$	$W(f) = [1; \infty)$
$L$	Lösungsmenge	$L = \{3\}$
$\rightarrow$	gegen; nähert sich	$x \rightarrow \infty$
$\lim$	Grenzwert (Limes)	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$
$\Delta y$	Delta $y$	$\Delta y = y_2 - y_1$
$f'(x)$	$f$ Strich von $x$	(1.) Ableitung von $f(x)$
$f''(x)$	$f$ zwei Strich von $x$	2. Ableitung von $f(x)$
$\frac{df}{dx}$	$df$ nach $dx$	$\frac{df}{dx} = f'$ ist die Ableitung von $f$
$\sum$	Summe	
$\sum_{i=1}^n x_i$	Summe aller $x_i$ von $i = 1$ bis $i = n$	$\sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
$\int$	unbestimmtes Integral	$\int f(x) dx = F(x) + C$
$\int_a^b f(x) dx$	(bestimmtes) Integral $f(x) dx$ von $a$ bis $b$	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

# Aufbau des Zahlensystems

Zum einfachen Abzählen von Gegenständen gebraucht der Mensch seit jeher Zahlen. Die Zusammenfassung dieser Zahlen ist die **Menge  $\mathbb{N}^*$  der natürlichen Zahlen einschließlich der Zahl 0**:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Wird dieser Menge  $\mathbb{N}^*$  die Zahl 0 hinzugefügt, erhält man die **Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Zahl 0**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Mit schwieriger werdenden Rechenoperationen (z. B.  $4 - 6 = ?$ ) erwies sich diese Zahlenmenge als nicht mehr ausreichend. Sie musste um die negativen Zahlen erweitert werden, sodass die **Menge der ganzen Zahlen** entstand:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Doch auch diese Zahlenmenge war irgendwann nicht mehr ausreichend. Aus Divisionsaufgaben (z. B.  $7 : 8 = \frac{7}{8} = 0,875$ ) ergab sich die **Menge der rationalen Zahlen**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}$ : Menge aller Brüche mit ganzzahligen Zählern und Nennern.

Um auf einer Zahlengeraden alle Lücken zu schließen, reicht die Menge der rationalen Zahlen jedoch noch nicht aus. Es gibt nämlich Zahlen, wie z. B.  $\sqrt{2}$  oder  $\pi$ , die sich nicht als Brüche mit ganzzahligen Zählern und Nennern darstellen lassen. Diese Zahlen, deren Dezimalzahlen unendlich nicht periodisch sind, heißen **irrationale Zahlen**. Erweitert man die Menge  $\mathbb{Q}$  um die Menge der irrationalen Zahlen, entsteht die **Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen**:

$\mathbb{R}$ : alle endlichen und unendlichen Dezimalzahlen

Eine weitere Vergrößerung des Zahlensystems ist möglich (dann wären z. B. Rechenoperationen wie  $\sqrt{-4}$  möglich), soll aber hier nicht vorgenommen werden<sup>1)</sup>.

Die oben beschriebenen Zahlenmengen können für bestimmte Fragestellungen eingegrenzt werden:

z. B.:

$\mathbb{R}_+^*$  = Menge der positiven reellen Zahlen (ohne die Zahl 0)

$\mathbb{Q}_-$  = Menge der negativen rationalen Zahlen einschließlich der Zahl 0

etc.

<sup>1)</sup> Die in diesem Lehrbuch durchgeführten Rechenoperationen beschränken sich auf die Menge der reellen Zahlen.

## Aufbau des Zahlensystems

Natürliche Zahlen ohne 0 $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$	0	
Natürliche Zahlen einschließlich 0 $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$		Negative ganze Zahlen $\mathbb{Z}_-^* = \{\dots; -3; -2; -1\}$
Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_-^* = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$		Echte Bruchzahlen, z. B. $\frac{3}{4}$ oder $\frac{1}{3}$
Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\}$		Irrationale Zahlen I: alle unendlichen nicht periodischen Zahlen, z. B. $\sqrt{2}$ oder $\pi$
Reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{I}$ : alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl		

### Übungsaufgaben

- 1 Durch welche Zahlenmengen unterscheiden sich die Mengen
  - a)  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{Q}$
  - b)  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{N}^*$ ?
- 2 Wodurch unterscheidet sich eine rationale von einer irrationalen Zahl?
- 3
  - a)  $\mathbb{N}^* \cup \{0\} =$
  - b)  $\mathbb{Z}_-^* \cup \mathbb{N}^* =$
  - c)  $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} =$



## 1

## Funktionenlehre

## 1.1 Funktionen

## 1.1.1 Definition und Begriffe

Funktionen bilden das zentrale Thema der sog. höheren Mathematik in der Sekundarstufe II. Aus diesem Grund ist es notwendig, den Begriff „Funktion“ zu definieren:

Eine **Funktion** ist eine **eindeutige Zuordnung** in der Weise, dass jeder Zahl  $x$  aus einer Definitionsmenge genau eine Zahl  $y$  aus der Wertemenge zugeordnet wird.

Eine Funktion lässt sich auf unterschiedliche Arten darstellen:

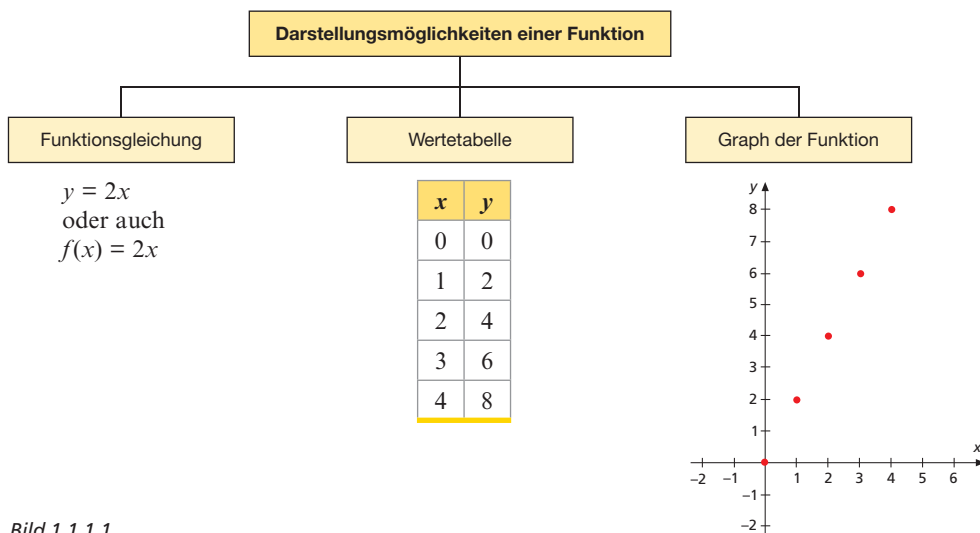


Bild 1.1.1.1

Gewöhnlich wird eine Funktion in der Weise angegeben, dass man zunächst die Funktion benennt. Als Kurzbezeichnung, als **Name für eine Funktion**, verwendet man in der Mathematik häufig kleine Buchstaben wie  $f$ ,  $g$ , oder  $h$ .<sup>1)</sup>

Um eine funktionale Zuordnung<sup>2)</sup> vornehmen zu können, muss dann zusätzlich noch die Gleichung der Funktion angegeben werden. In diesem Lehrbuch schreiben wir im Folgenden:

<sup>1)</sup> In der Wirtschaftslehre werden auch häufig Großbuchstaben als Namen für Funktionen vergeben wie  $K$  für Kostenfunktion,  $E$  für Erlösfunktion,  $G$  für Gewinnfunktion etc.

<sup>2)</sup> Die früher häufig verwendete Pfeilschreibweise für Funktionen  $f: x \mapsto f(x)$  macht den Zuordnungscharakter einer Funktion deutlich. Wegen des höheren Grades an Formalismus und der geringeren Aussagekraft wird diese Schreibweise heute in mathematischer Software und auch in diesem Buch nicht mehr verwendet.

$f: f(x) = 2x$  (gelesen: Eine Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f$  von  $x$  gleich  $2x$  oder kürzer:  $f$  mit  $f$  von  $x$  gleich  $2x$ ) bzw.  
 $f: y = 2x$  (kurz gelesen:  $f$  mit  $y$  gleich  $2x$ ).

Dabei ist  $f$  der **Name der Funktion** und  $f(x) = 2x$  bzw.  $y = 2x$  ist die **Gleichung der Funktion**<sup>1)</sup>.

Mithilfe der Funktionsgleichung lässt sich für jede Zahl  $x$  des Definitionsbereiches die zuzuordnende Zahl  $y$  des Wertebereiches berechnen, indem man in die Funktionsgleichung Zahlen aus dem Definitionsbereich für  $x$  einsetzt und dann  $y$  berechnet.

$f(x)$  ist der allgemein ausgedrückte **Funktionswert** an einer beliebigen Stelle  $x$ . „ $2x$ “ ist in diesem Fall der **Funktionswert**.

Die Zuordnungen, die sich aus der Funktionsgleichung ergeben, werden in einer sog. **Wertetabelle** (auch **Wertetafel**) angegeben. Der **Funktionsgraph** als **Schaubild der Funktion** verdeutlicht diese Zuordnung grafisch. Der  $x$ -Wert einer Funktion wird **Stelle** genannt, der dazugehörige  $y$ -Wert heißt **Funktionswert**. Im Schaubild der Funktion wird die  $x$ -Achse auch als **Abszissenachse**, die  $y$ -Achse als **Ordinatenachse** bezeichnet.

Die Definitionsmenge wird auch **Definitionsbereich einer Funktion  $f$**  genannt und mit  $D(f)$  abgekürzt. Der Definitionsbereich besteht aus den  $x$ -Werten, die die Funktion annehmen soll. Grafisch veranschaulicht sind das die Zahlen auf der  $x$ -Achse. Wenn der Graph einer Funktion als durchgehende Kurve ohne Unterbrechung gezeichnet werden soll, ist der maximale Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ .

Die Wertemenge wird auch **Wertebereich einer Funktion  $f$**  genannt und mit  $W(f)$  abgekürzt. Der Wertebereich besteht aus den  $y$ -Werten, die die Funktion annehmen kann. Im Schaubild finden wir diese Zahlen auf der  $y$ -Achse.

Das nebenstehende Schaubild verdeutlicht noch einmal alle bisher aufgetretenen Begriffe grafisch am Beispiel der Funktion  $f: f(x) = 2x$  für  $x$ -Werte von 0 bis 5.

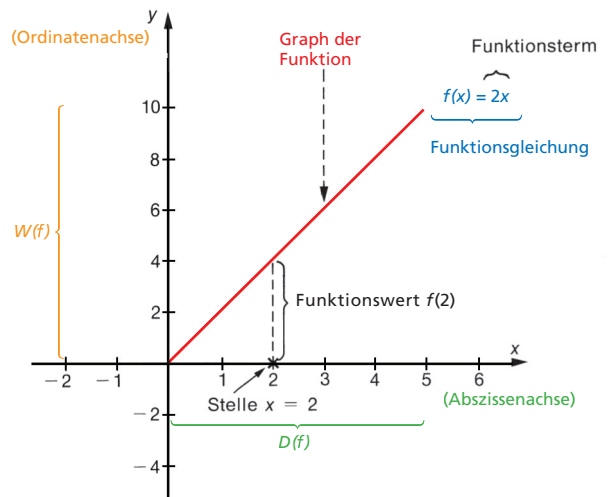


Bild 1.1.1.2

<sup>1)</sup> Die etwas komplizierter erscheinende Schreibweise  $f(x) = 2x$  bietet gegenüber der Schreibweise  $y = 2x$  den Vorteil, dass erkennbar ist, zu welchem  $x$ -Wert ein berechneter Funktionswert gehört.  $f(3) = 6$  (gelesen:  $f$  von 3 gleich 6) bedeutet: An der Stelle 3 ist der Funktionswert 6.

Der **Definitionsbereich** einer Funktion  $f$  heißt  $D(f)$ . Er enthält die Zahlen, die für  $x$  in die Funktionsgleichung eingesetzt werden sollen. Anschaulich: der auf der  $x$ -Achse zu betrachtende Zahlenbereich.

Je nach Funktion und Problemstellung kann der Definitionsbereich unterschiedlich sein. Für die im obigen Koordinatensystem dargestellte Funktion ist

$D(f) = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$  (**gelesen:** der Definitionsbereich  $D(f)$  ist die Menge aller  $x$ -Werte, für die gilt:  $x$  ist größer oder gleich 0 und kleiner oder gleich 5 aus der Menge der reellen Zahlen;  
**bedeutet:** Bei der Betrachtung der Funktion ist nur der  $x$ -Achsenabschnitt von Interesse, der die reellen Zahlen von 0 bis 5 umfasst.)

Der **Wertebereich** einer Funktion  $f$  heißt  $W(f)$ . Er umfasst alle Funktionswerte, die die Funktion annehmen kann.

Die oben abgebildete Funktion  $f: f(x) = 2x$  nimmt z. B. bei vorgegebenen Definitionsbereich  $D(f) = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$  Funktionswerte von 0 bis 10 aus der Menge der reellen Zahlen an (s. Bild 1.1.1.2). Demnach ist

$$W(f) = \{y \mid 0 \leq y \leq 10\}_{\mathbb{R}}$$

Häufig werden Definitions- und Wertebereich nicht wie oben in **Mengenschreibweise**, sondern in **Intervallschreibweise** angegeben. Ein **Intervall** ist ein bestimmter Abschnitt auf einer Zahlengeraden, z. B. der  $x$ -Achse. Der Abszissenabschnitt von 0 bis 5 bzw. der Ordinatenabschnitt von 0 bis 10 kann also angegeben werden durch

$$D(f) = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}; \quad W(f) = \{y \mid 0 \leq y \leq 10\}_{\mathbb{R}}$$

oder einfacher in Intervallschreibweise

$$D(f) = [0; 5] \quad W(f) = [0; 10]$$

Hier handelt es sich um ein **geschlossenes Intervall**, weil die Zahlen 0 und 5 am Rande des betrachteten Ausschnitts noch mit zum Intervall gehören.

Sollen beide „Randzahlen“ ausgeschlossen werden (**offenes Intervall**), schreibt man:

$$D(f) = (0; 5) \text{ bzw.}$$

$$D(f) = \{x \mid 0 < x < 5\}_{\mathbb{R}}$$

Entsprechend kann ein Intervall auch **halboffen** sein:

$$D(f) = (0; 5] \quad \text{bedeutet} \quad D(f) = \{x \mid 0 < x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$$

oder

$$D(f) = [0; 5) \quad \text{bedeutet} \quad D(f) = \{x \mid 0 \leq x < 5\}_{\mathbb{R}}$$

Eine **Einschränkung des Definitionsbereiches** ergibt sich häufig

- **aus dem Anwendungsbezug:**

Eine Kostenfunktion ordnet die in einem Betrieb entstehenden Kosten der jeweiligen Ausbringungsmenge zu.

Da die Ausbringungsmenge nur positiv sein kann und zudem die Produktionskapazität des Betriebes auf maximal 150 Stück begrenzt ist, ergibt sich der ökonomische Definitionsbereich:

$$D_{\text{ök}}(f) = \{x \mid 0 \leq x \leq 150\}_{\mathbb{R}} \text{ bzw.}$$

$$D_{\text{ök}}(f) = [0; 150]$$

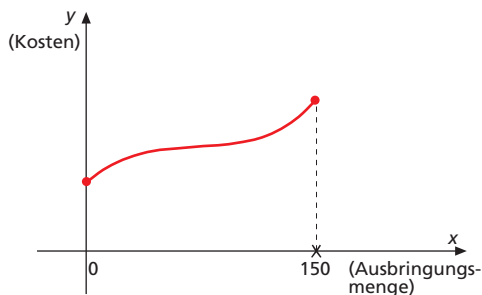


Bild 1.1.1.3

- **aus mathematischen Notwendigkeiten:**

In die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$  darf die Zahl 0 nicht für  $x$  eingesetzt werden, weil dann durch 0 dividiert werden müsste. Dies ist aber nicht erlaubt. Daraus folgt:  $f(0)$  ist nicht definierbar = n. d. Für die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist deshalb

$D(f) = \mathbb{R}^*$  (gelesen: Der Definitionsbereich von  $f$  ist die Menge der reellen Zahlen ohne 0; bedeutet: Der Zahl  $x = 0$  kann kein Funktionswert zugeordnet werden.)

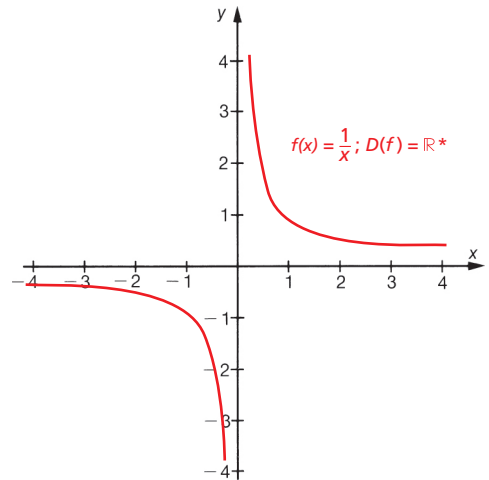


Bild 1.1.1.4

Eine **Relation** ist eine Zuordnung in der Weise, dass jeder Zahl  $x$  des Definitionsbereiches eine oder mehrere Zahlen  $y$  des Wertebereiches zugeordnet werden.

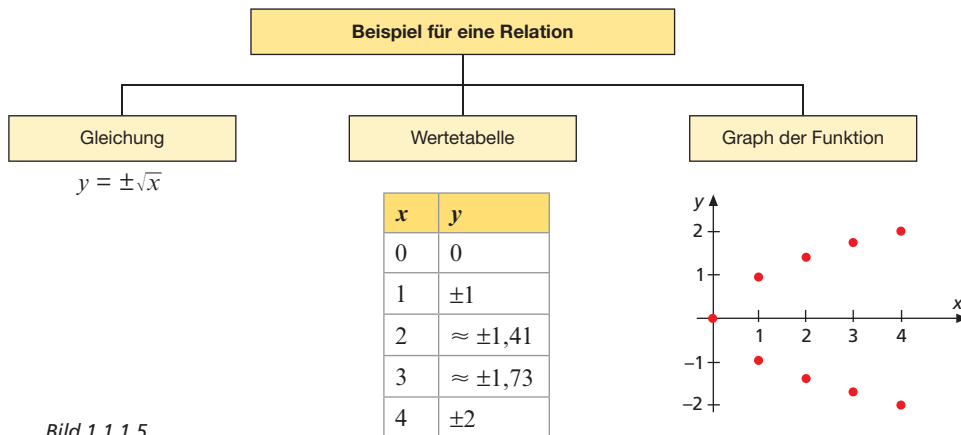


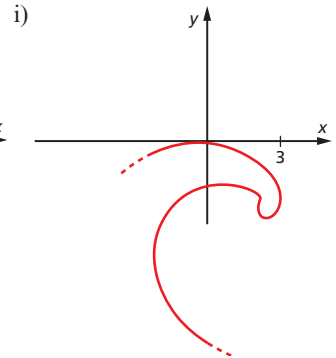
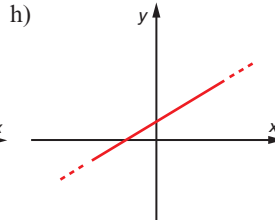
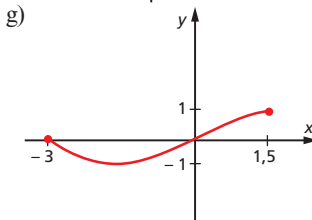
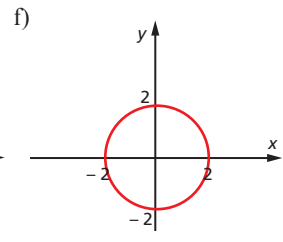
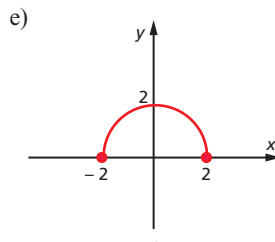
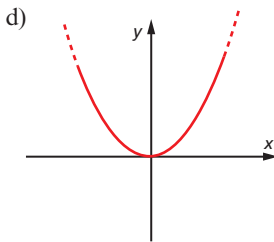
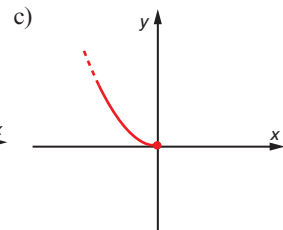
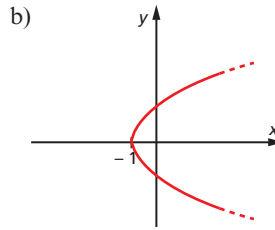
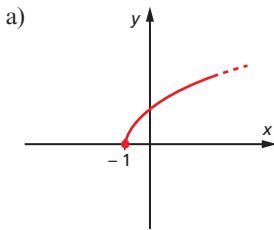
Bild 1.1.1.5

Beim Vergleich der Definitionen von Funktion und Relation fällt auf, dass **die Funktion ein Sonderfall der Relation** ist. Bei einer **Funktion** wird jedem  $x$ -Wert genau ein Funktionswert zugeordnet. Bei einer **Relation** können einem  $x$ -Wert (oder auch mehreren  $x$ -Werten) auch jeweils **mehrere  $y$ -Werte** zugeordnet werden.



## Übungsaufgaben

1 Handelt es sich bei den folgenden Schaubildern um Graphen von Funktionen oder Relationen? Begründen Sie Ihre Meinung.



2 Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der Relationen und Funktionen aus Übungsaufgabe 1<sup>1)</sup>.

3 Geben Sie die Funktionsgleichungen an.

- Jedem  $x$ -Wert ist ein Funktionswert zuzuordnen, der viermal so groß wie der  $x$ -Wert ist. Davon ist die Zahl 4 zu subtrahieren.
- Der Funktionswert entsteht durch Quadratur des  $x$ -Wertes abzüglich des dreifachen  $x$ -Wertes.
- Der Funktionswert ist identisch mit dem jeweiligen  $x$ -Wert.

4 Wie lauten die Funktionsterme zu Übungsaufgabe 3?

5 Legen Sie für die Funktionen aus Übungsaufgabe 3 Wertetafeln an, wobei  $D(f) = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{Z}}$  und zeichnen Sie die Graphen.

6 Geben Sie für die Funktionsgleichungen aus Übungsaufgabe 3 in mathematisch verkürzter Schreibweise für den Abszissenwert 3 die jeweiligen Funktionswerte an.

7 Wie lauten die Wertebereiche für die Funktionen aus Übungsaufgabe 3, wenn  $D(f) = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$  ist?

<sup>1)</sup> Die Strichelung der Funktionsgraphen in Übungsaufgabe 1 soll andeuten, dass der Graph der Funktion noch weiter verläuft. Auf den Achsen ist jeweils  $\mathbb{R}$  zugrunde zu legen.

8 Geben Sie in Intervallschreibweise an.

a)  $D(f) = \{x \mid -4 < x < 0\}_{\mathbb{R}}$

b)  $D(f) = \{x \mid -1 \leq x < 6\}_{\mathbb{R}}$

c)  $D(f) = \{x \mid 0 < x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

d)  $D(f) = \mathbb{R}_+$

9 Geben Sie in Mengenschreibweise an.

a)  $D(f) = (-\infty; 0)$

b)  $D(f) = (-1; 4)$

c)  $D(f) = (3; \infty)$

10 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich.

a)  $f: f(x) = 2x^2$

b)  $f: f(x) = \frac{1}{x^2}$

c)  $f: f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$

d)  $f: f(x) = \sqrt{x}$

11 Berechnen Sie.

a)  $f(3)$  für  $f(x) = -2x^2 - 6$

b)  $f(0)$  für  $f(x) = \frac{3x-6}{x^2}$

c)  $f(-1)$  für  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$

## 1.1.2 Bedeutung von Funktionen

Viele Probleme in Wirtschaft, Technik und anderen Wissensgebieten lassen sich durch Funktionen beschreiben, z. B.:

- Der Gewinn eines Betriebes in Abhängigkeit von der Produktionsmenge (siehe Bild 1.1.2.1)
- Die Dehnung eines Materialstückes in Abhängigkeit von der Temperatur
- Die Erträge eines Landwirtes in Abhängigkeit vom Düngereinsatz
- Die Arbeitslosenzahlen im Jahresablauf
- Der Materialverbrauch in Abhängigkeit von bestimmten Formen des Produktionsstückes.

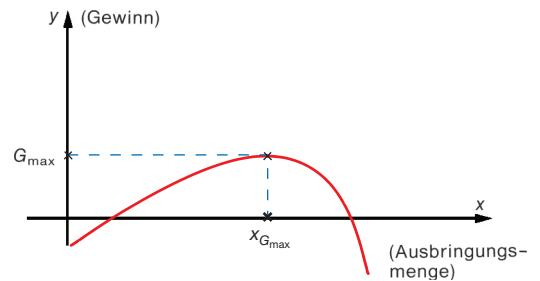


Bild 1.1.2.1

Wenn die Beschreibung derartiger Abhängigkeiten in Form von Funktionen gelingt, kann eine Vielzahl von Problemen (zumindest theoretisch) untersucht und rechnerisch gelöst werden. So wäre es beispielsweise für das Schaubild in Bild 1.1.2.1 interessant, die Ausbringungsmenge zu berechnen, bei der der Unternehmer seinen Gewinn maximiert.

In den folgenden Kapiteln werden verschiedenartige Funktionsklassen vorgestellt. Eine der Hauptaufgabenstellungen wird dabei durchgängig sein, aus jeweils einer Darstellungsform einer Funktion (s. Bild 1.1.2.2) in die jeweils andere zu übersetzen.

### Darstellungsmöglichkeiten einer Funktion

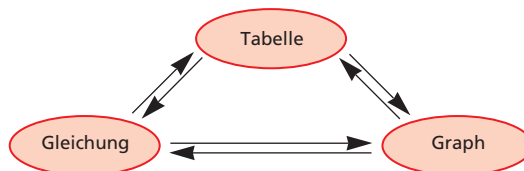


Bild 1.1.2.2

## 1.2 Lineare Funktionen

### 1.2.1 Bedeutung der Variablen $m$ und $b$ in $f(x) = mx + b$

Eine Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = mx + b$  heißt **lineare Funktion**.

#### Beispiel

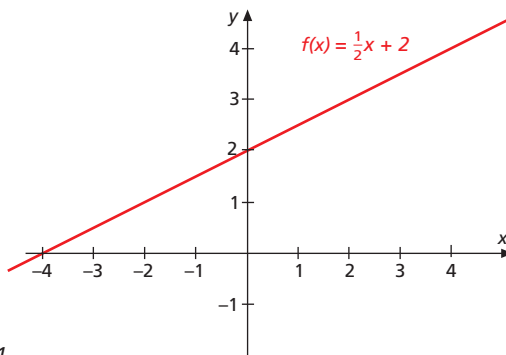


Bild 1.2.1.1

Der **Graph einer linearen Funktion** ist eine **Gerade**.

Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$  könnte natürlich mithilfe einer Wertetafel gezeichnet werden. Dieses Verfahren ist jedoch mit zunehmendem Schwierigkeitsgrad der Funktionsgleichungen sehr zeitaufwendig.

Deshalb geht es im Folgenden darum zu erkennen, wie sich einzelne Teile des Funktionsterms (hier  $m$  und  $b$ ) auf den Verlauf des Graphen der Funktion auswirken:

#### 1. Wie wirkt $m$ ?

Zur Beantwortung wird in die Funktionsgleichung für  $b$  die Zahl 0 eingesetzt und für  $m$  unterschiedliche Zahlen. Dann werden die Graphen (vorerst noch mithilfe von Wertetafeln) gezeichnet.

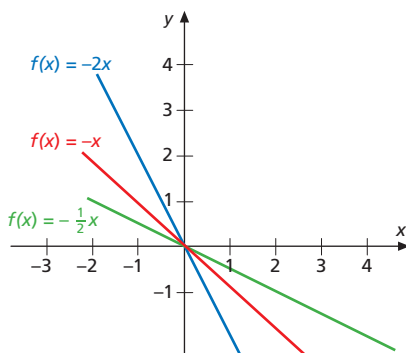


Bild 1.2.1.2

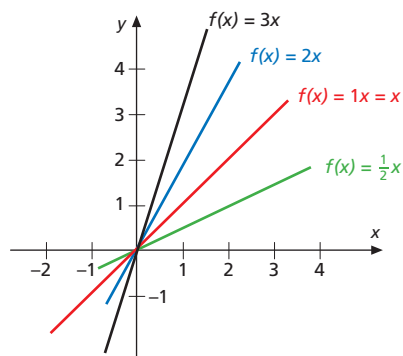


Bild 1.2.1.3

$m$  gibt die **Steigung** der Geraden an.

Je größer  $m$ , desto steiler verläuft die Gerade. Ist  $m$  negativ, verläuft die Gerade von links nach rechts fallend.

## 2. Wie wirkt $b$ ?

Zur Beantwortung wird jetzt  $m$  konstant gehalten ( $m = 1$ ) und  $b$  variiert.

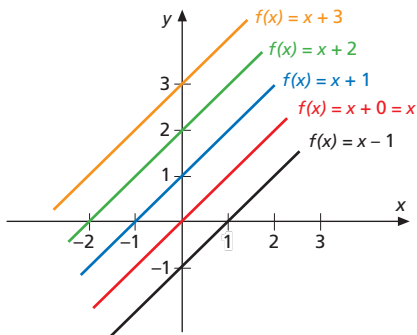


Bild 1.2.1.3

$b$  gibt an, wo die  $y$ -Achse geschnitten wird<sup>1)</sup>, das ist der Ordinatenabschnitt.

D. h.,  $b$  verschiebt den Graphen in  $y$ -Richtung.

### Zusammenfassung

Der Graph der Funktion  $f: f(x) = mx + b$  ist eine Gerade mit der Steigung  $m$ , die  $y$ -Achse wird bei  $b$  geschnitten.

### Übungsaufgaben

- 1 Beschreiben Sie verbal den Verlauf des Graphen der Funktion.
  - a)  $f: f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
  - b)  $f: f(x) = 1,5x - 1$
  - c)  $f: f(x) = -\frac{3}{4}x - 2$
  - d)  $f: f(x) = 2x + 2$
- 2 Wie erkennt man, dass eine Funktion linear ist
  - a) am Schaubild der Funktion?
  - b) an der Funktionsgleichung?
- 3 Wie stellen sich die Graphen der Funktion  $f: f(x) = mx + 1$  im Koordinatensystem dar, wenn für  $m$  alle Zahlen
  - a) aus  $\mathbb{N}^*$
  - b) aus  $\mathbb{Z}$  eingesetzt werden?
- 4 Wie stellen sich die Graphen der Funktion  $f: f(x) = 2x + b$  im Koordinatensystem dar, wenn für  $b$  alle Zahlen aus  $\mathbb{Z}$  eingesetzt werden?



<sup>1)</sup> Da  $b$  unabhängig von Veränderungen des  $x$ -Wertes ist, wird  $b$  **konstantes Glied** der Funktion oder auch **Absolutglied** genannt.