Matrizenrechnung zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Wolf-Dieter Rückwart

Die nachfolgenden Ausführungen stellen eine Ergänzung zu den „Rechnerischen Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme“ im Kapitel 8 meines Buches „Grundzüge des kaufmännischen Rechnens“ dar. Sie basieren auf der Matrizenrechnung, in der die im o. g. erwähnten Kapitel 8 dargestellten Rechenverfahren angewendet werden. Das folgende Beispiel beschränkt sich auf eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme, in denen die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Variablen übereinstimmen.

Beispiel
Auf Seite 93 des o. g. Buches ist das folgende Beispiel aufgeführt. Es wird hier für die Matrizenrechnung verwendet:

Für die Herstellung von drei Erzeugnissen E_1, E_2 und E_3 werden zwei verschiedene Rohstoffe R_1 und R_2 benötigt. Der Rohstoffeinsatz je Erzeugniseinheit, die zur Verfügung stehenden Rohstoffmengen und die geplanten Kosten je Erzeugniseinheit sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Gesamtkosten sollen 3 200 Geldeinheiten nicht übersteigen.

Rohstoffe R_i	*Rohstoffeinsatz R_i je Erzeugniseinheit E_i*			*Rohstoffmengen, Gesamtkosten*
	E_1	*E_2*	*E_3*	
R_1	*2*	*3*	*4*	*520*
R_2	*4*	*3*	*6*	*800*
Kosten K_i je E_i	*20*	*17,5*	*15*	*3.200*

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich das folgende Gleichungssystem (S. 93 im o. g. Buch):

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 520 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 800 \\ 20x_1 + 17{,}5x_2 + 15x_3 &= 3\,200 \end{aligned}$$

Entwicklung der Matrix
Die in der Aufgabenstellung und im Gleichungssystem angegebenen Rohstoffeinsätze und die Kosten je Erzeugniseinheit lassen sich wie folgt (unter Weglassung der Variablen x_i) als **Koeffizientenmatrix** schreiben:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 20 & 17{,}5 & 15 \end{pmatrix} \leftarrow \text{1. Zeile der Matrix}$$

1. Spalte der Matrix

Eine Matrix ist also eine in m Zeilen und n Spalten angeordnetes Schema von Zahlen Jede Zahl ist ihrer Zeile und ihrer Spalte genau zugeordnet. Die Zahlen heißen Elemente der Matrix.

Sofern eine Matrix nur aus einer Spalte besteht, wird sie **Spaltenvektor** genannt. Im obigen Gleichungssystem bilden die gesuchten Rohstoffmengen die Variablen x_i. Sie sind multiplikativ mit den Rohstoffeinsätzen sowie den Kosten verbunden und lassen sich zu folgendem Spaltenvektor ausgliedern:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Zusammen mit der Koeffizientenmatrix ergibt der Spaltenvektor den folgenden Term:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 20 & 17{,}5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Jede Zeile der Koeffizientenmatrix ist mit dem Spaltenvektor so verbunden, dass sich das obige Gleichungssystem ergibt. Es ist also durch Addition der Einzelgrößen zu rechnen:

Zahlen der ersten Zeile mal Spaltenvektor:	$2x_1 + 3x_2 + 4x_3$
Zahlen der zweiten Zeile mal Spaltenvektor:	$4x_1 + 3x_2 + 6x_3$
Zahlen der dritten Zeile mal Spaltenvektor:	$20x_1 + 17{,}5x_2 + 15x_3$

Auch die verfügbaren Rohstoffmengen und die maximalen Gesamtkosten ergeben einen Spaltenvektor:

$$\begin{pmatrix} 520 \\ 800 \\ 3\,200 \end{pmatrix}$$

Wird dieser Vektor als rechter Term dem obigen linken Term des Gleichungssystems zugefügt, ergibt sich das Gleichungssystem in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 20 & 17{,}5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 520 \\ 800 \\ 3\,200 \end{pmatrix}$$

Da die Lösung des Gleichungssystems nur von den Zahlen abhängt, lässt sich die Matrixform dadurch vereinfachen, dass

- die Variablen x_i weggelassen werden,
- der rechte Term des Gleichungssystems in die Koeffizientenmatrix einbezogen wird.

Es entsteht die folgende **erweiterte Matrix**, die unmittelbar aus der obigen Aufgabenstellung gebildet werden kann und die die Grundlage für die Lösung ist. Der rechte Term des Gleichungssystems (absolute Zahlen) wird in der Regel durch einen senkrechten Strich von der Koeffizientenmatrix abgetrennt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{520} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{800} \\ \mathbf{20} & \mathbf{17{,}5} & \mathbf{15} & \mathbf{3\,200} \end{array}\right)$$

Allgemeine Form

Das obige Beispiel wird durch folgende Ersetzungen **verallgemeinert**:

- Statt der Koeffizientenzahlen verwendet man den Buchstaben a mit Indizes.
- Statt der absoluten Zahlen im rechten Term verwendet man den Buchstabe b mit Indizes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich die allgemeine erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

a_{11} steht für die Zahl in der ersten Zeile und ersten Spalte der Matrix, a_{12} für die Zahl in der ersten Zeile und zweiten Spalte der Matrix, usw.

Lösungsverfahren
In der Koeffizientenmatrix bezeichnet man die von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale als sog. **Hauptdiagonale**. Entsprechend wird die von rechts oben nach links unten verlaufende Diagonale Nebendiagonale genannt.

Die Lösung des Gleichungssystems ist nun dann erreicht, wenn in der Hauptdiagonalen nur die **1** als Zahl steht, an allen anderen Positionen der Matrix nur Nullen. Diese sogenannte **Einheitsmatrix** hat in der allgemeinen Form folgendes Aussehen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{1^*} \\ 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & b_{2^*} \\ \dots & \dots & \boldsymbol{\dots} & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & \mathbf{1} & b_{m^*} \end{array}\right)$$

b_{1^*} steht für den Lösungswert zur Variablen x_1, entsprechend b_{m^*} für den Lösungswert der Variablen x_n.

Um von der allgemeinen Form der Koeffizientenmatrix zur Einheitsmatrix zu gelangen, kommen folgende **Zeilenoperationen** zur Anwendung:

- Division der ersten Zeile durch a_{11}. Es entsteht an der Stelle a_{11} das neutrale Element 1.
- Multiplikation der so veränderten ersten Zeile nacheinander mit den Gegenzahlen der übrigen Zeilen a_{21} bis a_{m1}.
- Addition der so erweiterten ersten Zeile zu den übrigen Zeilen. Auf diese Weise entstehen unterhalb von $a_{11} = 1$ nur Nullen.
- Entsprechend wird das Verfahren für alle Zahlen in der Hauptdiagonalen angewandt.

Lösung des Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 520 \\ 4 & 3 & 6 & 800 \\ 20 & 17{,}5 & 15 & 3\,200 \end{array}\right)$$

Division der 1. Zeile durch 2.

Die so veränderte Matrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} \mathbf{1} & \mathbf{3/2} & \mathbf{2} & \mathbf{260} \\ 4 & 3 & 6 & 800 \\ 20 & 17{,}5 & 15 & 3\,200 \end{array}\right)$$

Das zweite Element in der ersten Spalte muss gleich 0 werden. Dazu wird die erste Zeile mit (-4) multipliziert und zur zweiten Zeile addiert. Dazu ergibt sich folgende Nebenrechnung:

$$\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & -8 & -1\,040 \\ 4 & 3 & 6 & 800 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-240} \end{array}$$

Danach wird die erste Zeile mit (-20) multipliziert und zur dritten Zeile addiert:

$$\begin{array}{rrr|r} -20 & -30 & -40 & -5\,200 \\ 20 & 17{,}5 & 15 & 3\,200 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{-12{,}5} & \mathbf{-25} & \mathbf{-2\,000} \end{array}$$

Die erweiterte Matrix lautet nunmehr:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 3/2 & 2 & 260 \\ 0 & -3 & -2 & -240 \\ 0 & -12{,}5 & -25 & -2000 \end{array}\right)$$

Division der 2. Zeile durch (-3).

Die so veränderte Matrix lautet: $\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{3/2} & \mathbf{2} & \mathbf{260} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2/3} & \mathbf{80} \\ 0 & -12{,}5 & -25 & -2000 \end{array}\right)$

Das erste Element in der zweiten Spalte muss gleich 0 werden. Dazu wird die zweite Zeile mit (-3/2) multipliziert und zur ersten Zeile addiert. Dazu ergibt sich folgende Nebenrechnung:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & -3/2 & -1 & -120 & \multirow{2}{*}{\}+} \\ 1 & 3/2 & 2 & 260 & \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{140} & \end{array}$$

Danach wird die zweite Zeile mit (12,5) multipliziert und zur dritten Zeile addiert:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 12{,}5 & 25/3 & 1\,000 \\ 0 & -12{,}5 & -25 & -2\,000 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-50/3} & \mathbf{-1\,000} \end{array}\ \}+$$

Die erweiterte Matrix lautet nunmehr:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 140 \\ 0 & 1 & 2/3 & 80 \\ 0 & 0 & -50/3 & -1000 \end{array}\right)$ Multiplikation mit (-3/50)

Die so veränderte Matrix lautet: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 140 \\ 0 & 1 & 2/3 & 80 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{60} \end{array}\right)$

Das erste Element in der dritten Spalte muss gleich 0 werden. Dazu wird die dritte Zeile mit (-1) multipliziert und zur ersten Zeile addiert. Dazu ergibt sich folgende Nebenrechnung:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -60 \\ 1 & 0 & 1 & 140 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{80} \end{array}\ \}+$$

Danach wird die dritte Zeile mit (-2/3) multipliziert und zur zweiten Zeile addiert:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2/3 & -40 \\ 0 & 1 & 2/3 & 80 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{40} \end{array}\ \}+$$

Die erweiterte Matrix lautet nunmehr:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{80} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{40} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{60} \end{array}\right)$$

Die Einheitsmatrix ist hergestellt. Damit ist das Gleichungssystem eindeutig gelöst. Die Lösung lautet

$x_1 = 80$
$x_2 = 40$
$x_3 = 60$,

oder als Spaltenvektor geschrieben:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$