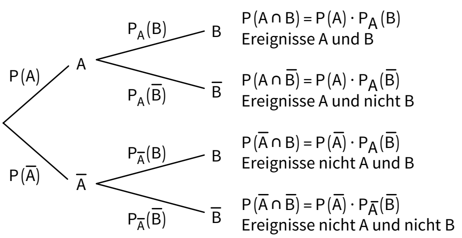
Multiplikationssatz

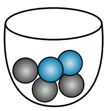
Allgemeiner Multiplikationssatz

Eine mathematische Umstellung der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ergibt den allgemeinen Multiplikationssatz für zwei Ereignisse A und B: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

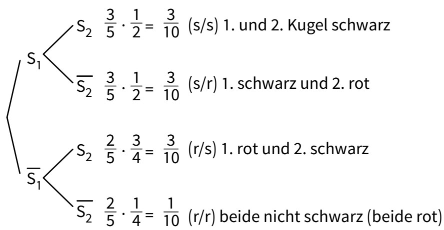


Ist die bedingte Wahrscheinlichkeit (meist ist sie theoretisch leicht herleitbar) bekannt, so kann damit die Wahrscheinlichkeit des Schnittes von A und B (in Worten: Ereignis A und Ereignis B) berechnet werden. Das links abgebildete Baumdiagramm zeigt alle Möglichkeiten bei einem zweistufigen Experiment auf.

Beispiel



Eine Urne enthält 2 blaue und 3 schwarze Kugeln. Man zieht ohne Zurücklegen zweimal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei schwarze Kugeln zieht?



Die Ereignisse A und B heißen voneinander unabhängig, wenn $P_A(B) = P(B)$ und damit auch $P_B(A) = P(A)$ gilt.

Multiplikationssatz mit mehr als zwei Ereignissen

Für drei Ereignisse A_1, A_2, A_3 gilt: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$

Für n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}} \cdot P(A_n)$$

n Ereignisse sind unabhängig voneinander, wenn sie paarweise unabhängig voneinander sind und jedes Ereignis zusätzlich von allen Schnitten, die gebildet werden können, unabhängig ist. Ändert sich die Wahrscheinlichkeit für B nicht, ganz gleich wie das Experiment von A auch ausgeht, so sind die Ereignisse A und B unabhängig. Damit wird der Multiplikationssatz sehr einfach.

Spezieller Multiplikationssatz

Für n unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Beispiel

Das Werfen einer Münze ist unabhängig vom vorigen Wurf der Münze.

Eine Münze wird viermal hintereinander geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass viermal Zahl fällt?
A_i sei das Ereignis „i-ter Wurf ist Zahl“. Es gilt:
$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0{,}5^4 = 0{,}0625.$