verstehen

9 Quadratische Gleichungen und Funktionen

Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable quadriert vorkommt. Man kann sie grafisch oder mit einer Lösungsformel lösen.

$2x^2 + 14x + 3 = 0$

quadratisches Glied ↗ ↑ lineares Glied ↖ absolutes Glied

Quadratische Gleichungen grafisch lösen

Um eine quadratische Gleichung grafisch zu lösen, wird sie zuerst nach x^2 aufgelöst. Die rechte Seite dieser Gleichung (das lineare und das absolute Glied) nimmt man dann als Geradengleichung an und zeichnet diese Gerade in ein Koordinatensystem. Zusätzlich wird die Normalparabel $y = x^2$ eingezeichnet. Die x-Werte der Schnitt- oder Berührungspunkte der Geraden und der Parabel ergeben die Lösungsmenge zu der quadratischen Gleichung.
Eine quadratische Gleichung kann zwei Lösungen haben (wenn die Gerade die Parabel schneidet), eine Lösung (wenn die Gerade die Parabel berührt) oder keine Lösung (wenn die Gerade an der Parabel vorbeigeht).

Beispiel 1: $-4x^2 + 2x + 6 = 0 \quad |-2x-6$

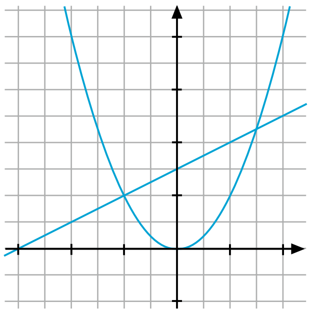
$-4x^2 = -2x - 6 \quad |:(-4)$

$x^2 = 0{,}5x + 1{,}5$

→ $y = x^2$ und $y = 0{,}5x + 1{,}5$

An zwei Punkten schneidet die Gerade die Normalparabel. Diese Punkte haben die x-Werte 1,5 und –1.

→ $L = \{-1; 1{,}5\}$



Lösungsformel: Die pq-Formel

Rechnerich lassen sich quadratische Gleichungen mit der pq-Formel lösen. Forme die Gleichung dazu so um, dass auf einer Seite des Gleichheitszeichens nur eine 0 steht und das quadratische Glied nur den Faktor 1 enthält. Deine Gleichung hat nun folgende Form: $x^2 + px + q = 0$.

Achte auf die Vorzeichen. Ist dein p in der Gleichung negativ, wird es in der pq-Formel positiv. Gleiches passiert bei dem q.

Für die Lösung dieser Gleichung gilt: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Du musst lediglich die Werte für p und q aus der oberen Gleichung ablesen, diese Werte in die pq-Formel einsetzen und so x_1 und x_2 ausrechnen. Diese Werte bilden deine Lösungsmenge.

Den Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, der unter der Wurzel steht, nennt man Diskriminante. Ist sie positiv, hat die Gleichung zwei Lösungen. Ist sie negativ, bleibt die Lösungsmenge leer. Ist sie gleich 0, gibt es genau eine Lösung für die Gleichung.

Beispiel 2:

$-4x^2 + 2x + 6 = 0 \qquad |:(-4)$

$x^2 - 0{,}5x - 1{,}5 = 0 \qquad \rightarrow p = -0{,}5 \qquad q = -1{,}5$

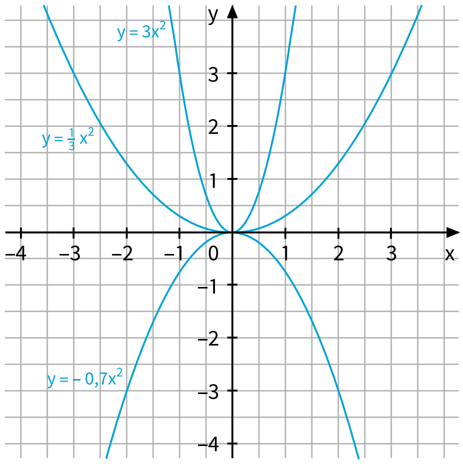
Einsetzen in die pq-Formel: $x_{1,2} = 0{,}25 \pm \sqrt{(0{,}25)^2 + 1{,}5}$

$x_1 = 0{,}25 + 1{,}25 = 1{,}5 \qquad x_2 = 0{,}25 - 1{,}25 = -1$

$L = \{-1;\ 1{,}5\}$

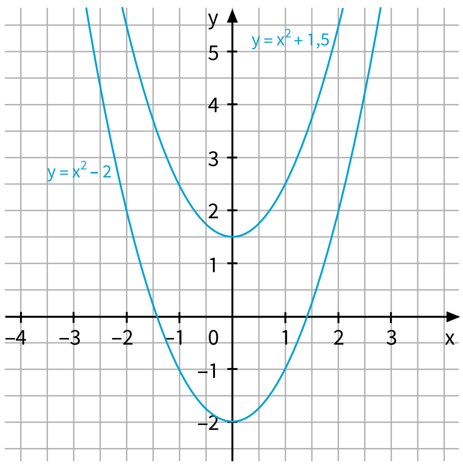
Einfluss der Parameter auf quadratische Funktionen

Da es unzählige quadratische Funktionen gibt, gibt es auch unterschiedliche Parabeln, die sich alle aus der Normalparabel $y = x^2$ herleiten lassen.



1. Strecken und Stauchen:
Durch Multiplikation des Terms x^2 entsteht eine Gleichung der Form $y = a \cdot x^2$. Dadurch verändert sich die Breite der Parabel. Ist $a > 1$, wird die Parabel „schlanker“, sie wird **gestreckt**. Liegt der Faktor a zwischen 0 und 1, also $0 < a < 1$, wird die Parabel breiter, sie wird **gestaucht**.

2. Spiegeln der Parabel:
Der Faktor vor dem x^2 kann auch negativ sein. In diesem Fall wird die Parabel einfach „nach unten geklappt“, sie wird an der x-Achse gespiegelt.

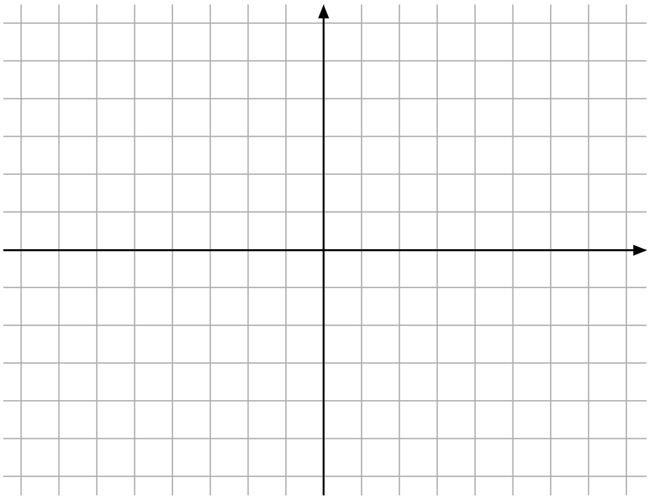


3. Verschieben der Parabel entlang der y-Achse:
Bei Funktionen der Form $y = x^2 + e$ erhält man als Graph eine Parabel, die e Einheiten nach oben (für $e > 0$) oder nach unten (für $e < 0$) verschoben wird.

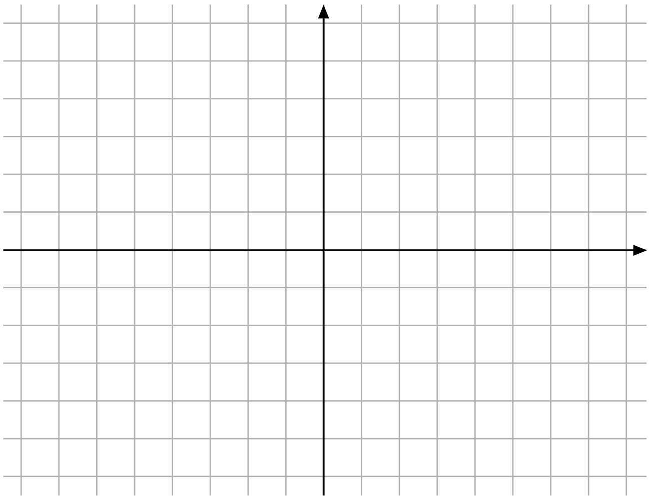
Test 1: Quadratische Gleichungen

1 Bestimme zeichnerisch die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

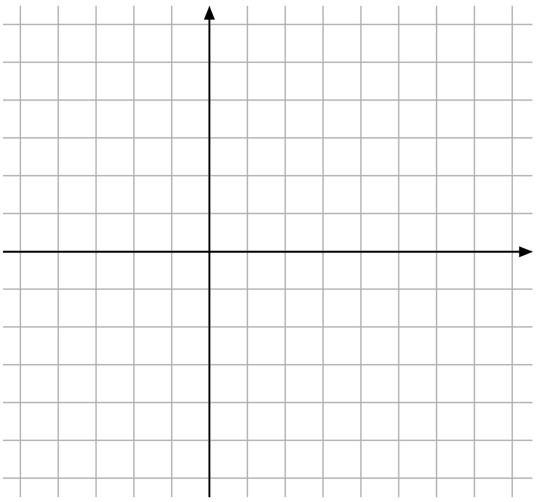
a) $x^2 + 2{,}6\,x + 1{,}69 = 0$



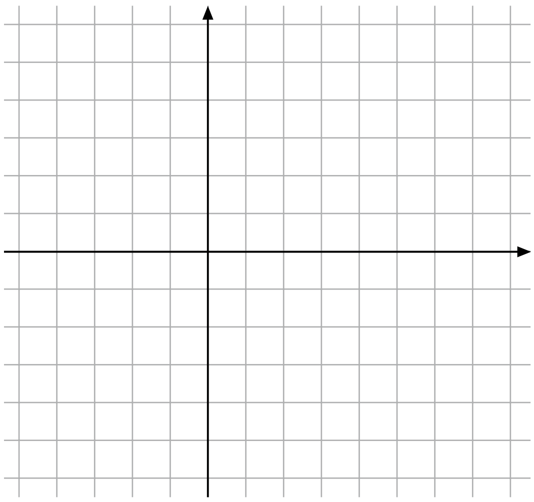
b) $x^2 - 0{,}7\,x + 1{,}5 = 0$



c) $-3\,x^2 + x = -5{,}4$



d) $(x + 1)^2 - 3 = \frac{1}{2}$



2 Löse die quadratischen Gleichungen aus Aufgabe 1 rechnerisch, um deine Ergebnisse zu überprüfen.

3 Erläutere, was der Rechner bei den folgenden Aufgaben falsch gemacht hat.

a) $x^2 - 3x - 6{,}25 = 1$

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{(1{,}5)^2 + 6{,}25}$

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{8{,}5}$

b) $x^2 + 5x - 0{,}01 = 0$

$x_{1,2} = -2{,}5 \pm \sqrt{(2{,}5)^2 - 0{,}01}$

$x_{1,2} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}24} = -2{,}5 \pm 2{,}5$

Klassenarbeit Nr. 9

60 min

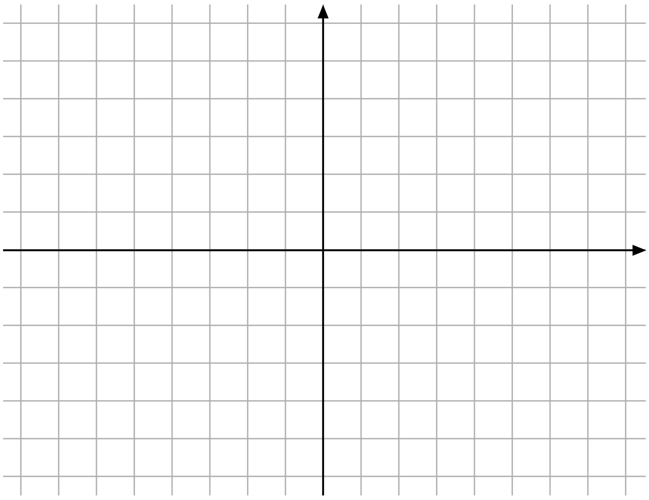
können

1 Löse die folgenden quadratischen Gleichungen zeichnerisch.

a) $x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^2 + 0{,}25 = x$

c) $3x + 4 = 2x^2$



/7

2 Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen.

a) $y = 3(x - 2{,}5)^2 - 5$ b) $y = -0{,}3(x - 1)^2 + 2$ c) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

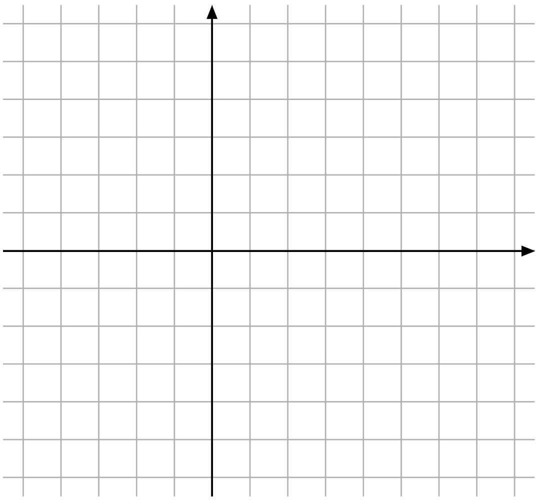
Beschreibe den Verlauf und die Form der drei Graphen: Welche Quadranten durchlaufen sie in welcher Reihenfolge? Wo liegt ihr Scheitel? Sind sie gestreckt, gestaucht, gespiegelt, verschoben?

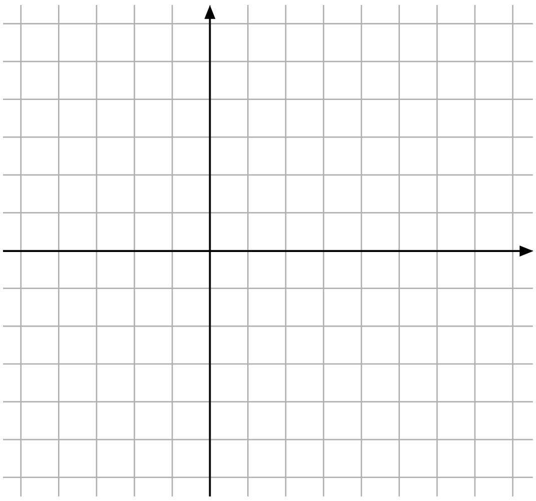
/12

3 Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen (jeweils zwei in ein Koordinatensystem).

a) $y = (x - 1)^2 + 3$ b) $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2$

c) $y = -2(x - 1)^2$ d) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3{,}5$





/12

4 Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ b) $y = \frac{1}{3}x^2 - x - 1$ c) $y = -2x^2 + 4x + 18$

/9

5 Von zwei Rechtecken ist der Umfang von 64 cm bekannt, sowie die Fläche von 124 cm^2. Berechne die Seitenlängen a und b der beiden Rechtecke.

/8

6 Bestimme rechnerisch die Schnittpunkte der folgenden Graphen.

a) $y = -2x + 4$ und $y = -(x - 1)^2 + 4$

b) $y = (x + 2)^2 - 5$ und $y = -2(x + 0{,}8)^2 + 0{,}28$

/8

erreichte Punktzahl

/ **56**