Horst Brübach, Karl-Heinz Laubersheimer, Klaus Schäfer

# Technische Mathematik für Elektroberufe

## Industrie und Handwerk

8. Auflage

Bestellnummer 44016

Bildungsverlag EINS
westermann

**service@bv-1.de**
**www.bildungsverlag1.de**

Bildungsverlag EINS GmbH
Ettore-Bugatti-Straße 6-14, 51149 Köln

ISBN 978-3-427-**44016**-1

*westermann* GRUPPE

© Copyright 2018: Bildungsverlag EINS GmbH, Köln
Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.
Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

# Vorwort

Das vorliegende Buch „Technische Mathematik für Elektroberufe“ ist eine Überarbeitung der 7. Auflage und wurde unter Berücksichtigung der Neuordnung der Elektroberufe von 2002 konzipiert.

Jedes fachbezogene Kapitel beginnt mit einem Informationsteil, mit dessen Hilfe die nachfolgenden Aufgaben gelöst werden können.

Technologische Hinweise erleichtern das Erkennen von Zusammenhängen.

Auf eine Zuordnung der Themengebiete zu einzelnen Lernfeldern wurde bewusst verzichtet, da nicht alle Lernfelder Berechnungen enthalten.

Den Verfassern ist durchaus bewusst, dass manche Probleme nicht erschöpfend behandelt werden, viele Aufgabengebiete können nur angedeutet werden.

Die Autoren

# Inhaltsverzeichnis


**1 Grundkenntnisse der technischen Mathematik**

1.1 Bruchrechnen ... 7
1.1.1 Darstellung von Brüchen ... 7
1.1.2 Addition und Subtraktion ... 8
1.1.3 Multiplikation ... 9
1.1.4 Division ... 10
1.2 Rechnen mit Klammerausdrücken ... 11
1.3 Dreisatzrechnen ... 12
1.4 Potenzrechnen ... 13
1.4.1 Darstellung von Potenzen ... 13
1.4.2 Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten ... 14
1.4.3 Grundrechenarten mit Potenzen ... 15
1.4.4 Potenzieren und Radizieren ... 16
1.5 Gleichungen ... 17
1.5.1 Gleichungen mit Summen und Differenzen ... 17
1.5.2 Gleichungen mit Produkten und Quotienten ... 18
1.6 Prozentrechnen ... 19
1.7 Körperberechnungen ... 20
1.7.1 Längen (Umfang) und Flächen ... 20
1.7.2 Volumen und Masse ... 22
1.8 Kraft, Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad ... 24
1.9 Gesetze im rechtwinkligen Dreieck ... 26
1.9.1 Satz des Pythagoras ... 26
1.9.2 Trigonometrische Funktionen ... 27

**2 Zusammenhänge im elektrischen Stromkreis**

2.1 Ladung, Spannung und Stromstärke ... 28
2.2 Stromdichte ... 29
2.3 Der elektrische Widerstand ... 30
2.3.1 Das ohmsche Gesetz ... 30
2.3.2 Abhängigkeiten von Leitergrößen ... 32
2.3.3 Abhängigkeit von der Temperatur ... 34

**3 Schaltungen von ohmschen Widerständen**

3.1 Reihenschaltung ... 36
3.2 Parallelschaltung ... 38
3.3 Gemischte Schaltung ... 40
3.4 Der Spannungsteiler ... 42

**4 Messtechnik**

4.1 Mess- und Anzeigefehler von Messgeräten ... 44
4.2 Messbereichserweiterung ... 46
4.2.1 Spannungsmessgeräte mit Drehspulmesswerk ... 46
4.2.2 Strommessgeräte mit Drehspulmesswerk ... 48
4.3 Widerstandsmessverfahren ... 50
4.3.1 Indirekte Ermittlung ... 50
4.3.2 Direkte Messung (Wheatstone-Messbrücke) ... 52
4.4 Messen mit dem Oszilloskop ... 54

**5 Energieumsetzung in Widerständen**

5.1 Elektrische Leistung und Arbeit ... 56
5.2 Wärmemenge (Wärmearbeit) ... 58
5.3 Wärmenutzungsgrad ... 60
5.4 Kosten elektrischer Arbeit („Stromkosten“) ... 62

**6 Galvanische Elemente**

6.1 Belastungsarten ... 64
6.2 Schaltung von Spannungsquellen ... 66

**7 Erzeugung elektrischer Energie**
7.1 Das magnetische Feld ... 68
7.1.1 Kenngrößen ... 68
7.1.2 Berechnung magnetischer Kreise ... 70
7.2 Erzeugung einer Wechselspannung ... 72
7.2.1 Induktion der Bewegung ... 72
7.2.2 Winkelfunktionen Sinus und Cosinus im Einheitskreis ... 74
7.2.3 Zeitlicher Verlauf ... 75
7.2.4 Kenngrößen ... 76
7.2.5 Addition sinusförmiger Wechselgrößen gleicher Frequenz ... 78
7.3 Die Dreiphasen-Wechselspannung ... 80

**8 Transformieren elektrischer Energie**
8.1 Induktion der Ruhe ... 82
8.2 Transformatoren ... 84
8.2.1 Übersetzungsverhältnis und Hauptgleichung ... 84
8.2.2 Verluste und Wirkungsgrad ... 86

**9 Nutzen elektrischer Energie**
9.1 Bauelemente im Wechselstromkreis ... 88
9.1.1 Der Wirkwiderstand (ohmscher Widerstand) und die Wirkleistung ... 88
9.1.2 Die ideale Spule (Induktivität) ... 90
9.1.2.1 Schaltvorgänge bei Spulen an Gleichspannung ... 90
9.1.2.2 Schaltungen von Induktivitäten ... 91
9.1.2.3 Der induktive Blindwiderstand und die induktive Blindleistung ... 92
9.1.3 Der ideale Kondensator (Kapazität) ... 94
9.1.3.1 Die Kapazität ... 94
9.1.3.2 Lade- und Entladevorgänge bei Kondensatoren ... 96
9.1.3.3 Schaltungen von Kondensatoren ... 97
9.1.3.4 Der kapazitive Blindwiderstand und die kapazitive Blindleistung ... 98
9.2 Betriebsmittel im Wechselstromkreis ... 100
9.2.1 R-L-Reihenschaltung (reale Spule) ... 100
9.2.2 R-C-Reihenschaltung ... 102
9.2.3 R-L-C-Reihenschaltung ... 104
9.2.4 R-L-Parallelschaltung ... 106
9.2.5 R-C-Parallelschaltung ... 108
9.2.6 R-L-C-Parallelschaltung ... 110
9.2.7 Blindleistungskompensation in Wechselstromanlagen ... 112
9.3 Betriebsmittel im Drehstromkreis ... 114
9.3.1 Symmetrische Belastung bei Stern- und Dreieckschaltung ... 114
9.3.2 Blindleistungskompensation in Drehstromanlagen ... 116

**10 Elektrische Anlagen der Haustechnik**
10.1 Schutzmaßnahmen nach DIN VDE 0100 ... 118
10.1.1 Kenngrößen ... 118
10.1.2 Schutzmaßnahmen im TN-System ... 120
10.1.3 Schutzmaßnahmen im TT-System ... 122
10.2 Leitungsdimensionierung ... 124
10.2.1 Spannungsfall auf Wechsel- und Drehstromleitungen ... 124
10.2.1.1 Unverzweigte Leitungen ... 124
10.2.1.2 Verzweigte Leitungen ... 126
10.3 Licht- und Beleuchtungstechnik ... 128
10.3.1 Größen der Lichttechnik ... 128
10.3.2 Beleuchtungstechnik ... 130

**11 Elektrische Antriebe**
11.1 Leistungs- und Drehmomentübertragung ... 132
11.2 Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter ... 134
11.3 Gleichstrommotoren ... 136
11.3.1 Ankerkreis, Anlasser ... 136
11.3.2 Anker- und Erregerkreis ... 138
11.3.3 Drehfrequenzverstellung ... 140

11.4 Drehstrom-Asynchronmotoren ... 142
11.4.1 Drehfrequenzen und Schlupf ... 142
11.4.2 Leistungen und Wirkungsgrad ... 144

**12 Umrichten elektrischer Energie**
12.1 Ungesteuerte Stromrichter ... 146
12.1.1 Die Diode im Gleichstromkreis ... 146
12.1.2 Ungesteuerte Gleichrichterschaltungen ... 148
12.1.3 Z-Dioden (Spannungsstabilisierung) ... 150
12.2 Gesteuerte Stromrichter ... 152
12.2.1 Gesteuerte Gleichrichterschaltungen ... 152
12.2.2 Wechselstromsteller ... 154
12.2.3 Gleichstromsteller ... 156

**13 Steuern und Regeln elektrischer Antriebe**
13.1 Steuerungstechnik ... 158
13.1.1 Dualzahlen ... 158
13.1.2 Rechnen mit Dualzahlen ... 159
13.1.3 Schaltalgebra ... 160
13.1.3.1 Logische Grundfunktionen ... 160
13.1.3.2 Funktionsformen ... 162
13.1.4 Vereinfachung von Schaltnetzen ... 164
13.1.4.1 KV-Tafeln (Karnaugh und Veitch) ... 164
13.1.4.2 Mathematische Vereinfachung logischer Schaltungen ... 166
13.2 Regelungstechnik ... 168
13.2.1 Sensoren ... 168
13.2.2 Impulstechnik ... 170
13.2.3 Verhalten von Regelstrecken ... 172
13.2.3.1 P-Verhalten ... 172
13.2.3.2 Dynamisches Verhalten von Regelstrecken 1. Ordnung ... 174
13.2.3.3 Dynamisches Verhalten von Regelstrecken 2. und höherer Ordnung ... 176

**14 Verstärker**
14.1 Bipolare Transistoren ... 178
14.1.1 Kennlinien/Statische Kennwerte ... 178
14.1.2 Kennlinienfeld/Kleinsignalverstärkung ... 180
14.1.3 Dimensionierung von Transistorschaltungen ... 184
14.2 Operationsverstärker ... 186
14.2.1 Allgemeine Kenngrößen ... 186
14.2.2 Schaltungen mit Operationsverstärkern ... 188
14.2.2.1 Invertierer ... 188
14.2.2.2 Summierverstärker ... 190
14.2.2.3 Nichtinvertierer ... 192
14.2.2.4 Differenzverstärker ... 194

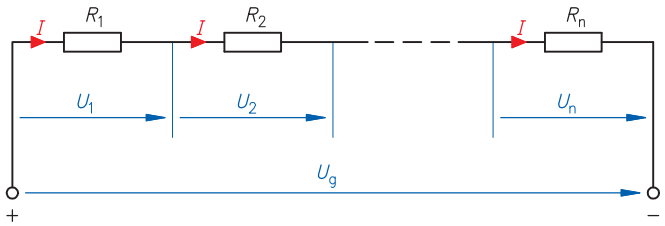
**15 Projektaufgaben** ... 196

**16 Anhang**
16.1 Werkstoffe ... 210
16.2 Vorzugsreihen für Bemessungswerte von Widerständen und Kondensatoren nach DIN IEC 60063 ... 210
16.3 Verlegearten von Kabeln und Leitungen (DIN VDE 0298/Teil 4) ... 211
16.4 Höchstzulässige Strombelastbarkeit $I_z$ in A (nach DIN VDE 0298/Teil 4) und Bemessungsstrom $I_n$ der zugeordneten Überstrom-Schutzorgane in A ... 211
16.5 Bemessungsdaten von Drehstrom-Kurzschlussläufermotoren für 400 V/50 Hz ... 211
16.6 Lampenwerte (Auswahl) ... 212
16.7 Lichtstärkeverteilungskurven, Betriebswirkungsgrade ... 212
16.8 Reflexionsgrade ... 213
16.9 Raumwirkungsgrade bei unterschiedlicher Beleuchtung ... 213
16.10 Sonderfälle der Schaltalgebra ... 214

**Sachwortverzeichnis** ... 215
**Bildquellenverzeichnis** ... 219

# 3 Schaltung von ohmschen Widerständen

## 3.1 Reihenschaltung




**Alle Widerstände werden vom gleichen Strom *I* durchflossen.**

Gesamtspannung $U_g$

$$U_g = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$

2. Kirchhoffsches Gesetz
$\sum U = 0$ V *)

⇓

Gesamtwiderstand $R_g$

$$R_g = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

Die Spannungen verhalten sich wie die zugehörigen Widerstände:

z. B.: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$ $\qquad \frac{U_k}{U_l} = \frac{R_k}{R_l}$ $\qquad$ z. B.: $\frac{U_g}{U_2} = \frac{R_g}{R_2}$

### Aufgaben

**Beispiel:** Ein 30-Ω-Widerstand liegt mit einem 50-Ω-Widerstand in Reihe an 12 V.
- **a)** Wie groß ist der Gesamtwiderstand?
- **b)** Welcher Strom fließt in der Schaltung?
- **c)** Welche Spannung liegt am 30-Ω-Widerstand an?

*Gegeben:* $R_1 = 30\ \Omega$; $R_2 = 50\ \Omega$; $U_g = 12$ V

*Gesucht:* $R_g$; $I$; $U_1$

*Lösung:*

**a)** $R_g = R_1 + R_2 = 30\ \Omega + 50\ \Omega = \mathbf{80\ \Omega}$

**b)** $I = \frac{U_g}{R_g} = \frac{12\text{V}}{80\ \Omega} = \mathbf{0{,}15\ A}$

**c)** $U_1 = I \cdot R_1 = 0{,}15\ \text{A} \cdot 30\ \Omega = \mathbf{4{,}5\ V}$

**1.** Die Widerstände $R_1$ = 820 Ω, $R_2$ = 1,3 kΩ und $R_3$ = 4,6 kΩ sind in Reihe geschaltet. Wie groß ist der Gesamtwiderstand?

**2.** Eine Reihenschaltung aus vier Widerständen hat einen Gesamtwiderstand von 3,6 kΩ. Welchen Widerstandswert hat $R_2$, wenn $R_1 = 520\ \Omega$, $R_3 = 800\ \Omega$ und $R_4 = 1{,}4$ kΩ hat?

**3.** In einer Reihenschaltung werden die Spannungen 12,4 V, 3,8 V und 0,9 V an den einzelnen Widerständen gemessen. Wie groß ist die Gesamtspannung?

**4.** Die Gesamtspannung in einer Reihenschaltung von drei Widerständen beträgt 220 V. Am Widerstand $R_1$ wird die Spannung 78 V, am Widerstand $R_3$ die Spannung 54 V gemessen. Welche Spannung wird an $R_2$ gemessen?

*) In jedem geschlossenen Stromkreis und in jeder Netzmasche ist die Summe aller Spannungen gleich 0 V.

**5.** Eine Reihenschaltung mit 15 gleichen Widerständen hat den Gesamtwiderstand 10,2 kΩ. Wie groß ist jeder Einzelwiderstand?

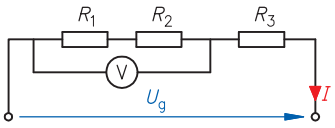
**6.** Eine Lichterkette mit Kleinspannungslampen der Bemessungsspannung 2,5 V wird in Reihenschaltung an 230 V angeschlossen. Wie viele Lampen sind für die Schaltung erforderlich?

**7.** Drei in Reihe geschaltete Widerstände von 60 Ω, 80 Ω und 0,1 kΩ sind an 110 V angeschlossen.
- **a)** Wie groß ist der Gesamtwiderstand?
- **b)** Wie groß ist der Strom?
- **c)** Welche Teilspannungen werden an den einzelnen Widerständen gemessen?

**8.** Einem Messwiderstand von 300 Ω wird ein zweiter von 1,2 kΩ in Reihe hinzugeschaltet. Am ersten Messwiderstand wird eine Spannung von 85 mV gemessen. Welchen Wert zeigt das Spannungsmessgerät am zweiten Messwiderstand an?

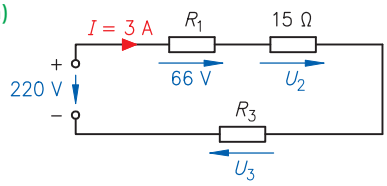
**9.** In einer Reihenschaltung von zwei Widerständen wird die Teilspannung $U_1 = 0{,}05$ kV, die Gesamtspannung $U = 380$ V und der Gesamtstrom $I = 16$ A gemessen. Wie groß sind die beiden Widerstände?

**10.** Das Spannungsmessgerät zeigt 65 V an, wenn 0,25 A fließen; $R_2 = 100\ \Omega$ und $R_3 = 250\ \Omega$.
- **a)** Wie groß ist die Gesamtspannung?
- **b)** Welchen Widerstandswert hat $R_1$?

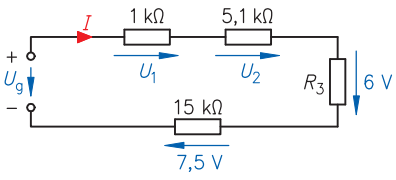



**11.** Wie groß sind die fehlenden Widerstände, Spannungen und Ströme in den Schaltungen?

**a)**

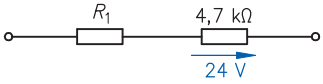



**b)**




**12.** Eine Projektorlampe mit der Aufschrift 110 V/1,2 A soll kurzfristig an 230 V geschaltet werden. Welcher (Vor-)Widerstand ist zu wählen, damit die Lampe nicht zerstört wird?

**13.** Bei nebenstehender Schaltung soll an $R_1$ eine Spannung von 72 V abfallen. Wie groß ist $R_1$ zu wählen?




**14.** Eine Lampenkette für 230 V besteht aus neun in Reihe geschalteten Glühlampen. Durch die Lampen fließt ein Strom von 625 mA.
- **a)** Wie groß ist der Widerstand einer Lampe?
- **b)** Welche Spannung kann an jeder Lampe gemessen werden?

**15.** Durch zwei in Reihe geschaltete gleiche Widerstände $R_1 = R_2 = 33\ \Omega$ fließt ein Strom von 240 mA.
- **a)** An welche Spannung ist die Schaltung angeschlossen?
- **b)** Welcher Widerstand muss zugeschaltet werden, damit sich die Stromstärke auf 160 mA verringert?

**16.** Zwei Heizwiderstände mit den Aufschriften 110 V/2 A und 110 V/4 A werden in Reihe geschaltet und an 220 V angeschlossen.
- **a)** Welchen Widerstandswert haben die Heizwiderstände?
- **b)** Wie groß ist der Gesamtwiderstand der Schaltung?
- **c)** Welcher Strom fließt in der Schaltung?
- **d)** Welche Spannungen liegen an den einzelnen Heizwiderständen?

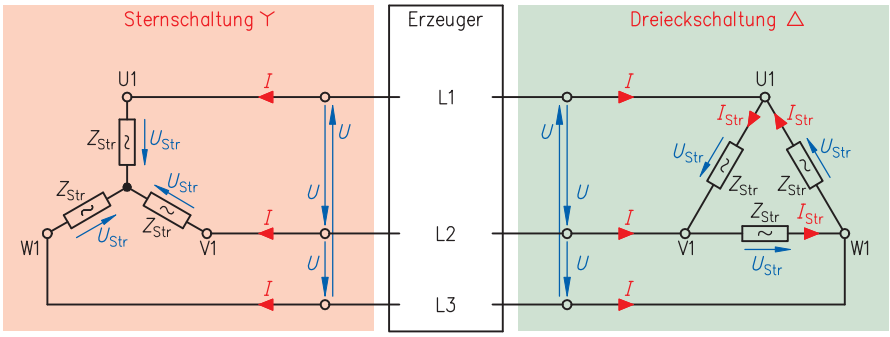
**17.** Ein Vorwiderstand begrenzt den Strom eines Heizgeräts, das an 235 V liegt, von 8,5 A auf 5 A.
- **a)** Wie groß ist der Widerstandswert des Heizgeräts?
- **b)** Welchen Vorwiderstand benötigt man?
- **c)** Wie hoch ist nach dem Vorschalten die Spannung am Heizwiderstand?

**18.** Eine Kontrolllampe hat die Aufschrift 3 V/0,2 A.
- **a)** Welchen Widerstand hat die Lampe an Nennspannung?
- **b)** Wie groß muss der Vorwiderstand beim Anschluss an 12 V gewählt werden?
- **c)** Welcher zusätzlicher Widerstand muss bei einer Netzspannung von 24 V gewählt?
- **d)** Wie verteilt sich die 24-V-Betriebsspannung?

**19.** Durch einen 5,6-Ω-Vorwiderstand wird der Strom in einem elektrischen Bauteil um 0,5 A und die Spannung um 20 V reduziert. Wie groß war die Spannung vor der Veränderung?

## 9.3 Betriebsmittel im Drehstromkreis

### 9.3.1 Symmetrische Belastung bei Stern- und Dreieckschaltung




$I = I_{Str}$ $\quad U = \sqrt{3}\, U_{Str}$ $\qquad\qquad$ $U = U_{Str}$ $\quad I = \sqrt{3}\, I_{Str}$

Die Berechnungsformeln gelten für beide Schaltungen.

**Stranggrößen**

$$S_{Str} = U_{Str} \cdot I_{Str} \quad \Downarrow \quad U_{Str} = R_{Str} \cdot I_{Str}$$

**Gesamtgrößen**

| mit Strangwerten | Scheinleistung | mit Leiterwerten |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{S = 3 \cdot U_{Str} \cdot I_{Str}}$ | $[S] = \text{VA}$ | $\boldsymbol{S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I}$ |

| Wirkleistung | Blindleistung |
|---|---|
| $[P] = \text{W}$ $\quad \boldsymbol{P = S \cdot \cos\varphi}$ | $\boldsymbol{Q = S \cdot \sin\varphi}$ $\quad [Q] = \text{VAr}$ |

Werden Elektrowärmegeräte > 4,6 kW angeschlossen, ist ein Drehstromkreis erforderlich!

$$\boldsymbol{Z = R \quad \Rightarrow \quad S = P \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 1}$$

### Aufgaben

**Beispiel:** Drei gleiche Spulen mit $R = 50\,\Omega$ und $X_L = 20\,\Omega$ werden in Sternschaltung an das 400-V-Drehstromnetz angeschlossen.

a) Wie groß ist der Scheinwiderstand eines Stranges?
b) Welche Spannung liegt an einem Strang an?
c) Wie groß ist der Strom in den Zuleitungen?
d) Welche Wirkleistung nimmt die Schaltung auf?

*Gegeben:* $U = 400\,\text{V}$; $R = 50\,\Omega$; $X_L = 20\,\Omega$; Y-Schaltung

*Gesucht:* $Z_{Str}$; $U_{Str}$; $I$; $P_{zu}$

*Lösung:*

a) $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(50\,\Omega)^2 + (20\,\Omega)^2} = \mathbf{53{,}85\,\Omega}$

b) $U_{Str} = \dfrac{U}{\sqrt{3}} = \dfrac{400\,\text{V}}{\sqrt{3}} = \mathbf{230{,}94\,V}$

c) $I = I_{Str} = \dfrac{U_{Str}}{Z_{Str}} = \dfrac{230{,}94\,\text{V}}{53{,}85\,\Omega} = \mathbf{4{,}29\,A}$

d) $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{50\,\Omega}{53{,}85\,\Omega} = 0{,}9285$

$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 230{,}94\,\text{V} \cdot 4{,}29\,\text{A} \cdot 0{,}9285 = \mathbf{1593{,}3\,W}$

**1.** Drei gleiche Widerstände werden in Sternschaltung an ein Drehstromnetz mit 400 V Leiterspannung angeschlossen. Wie groß ist die Spannung an einem Widerstand?

**2.** In der Zuleitung eines in Dreieck geschalteten Durchlauferhitzers fließen 27 A. Welcher Strom fließt durch einen Strang der Heizwicklung?

**3.** In einer symmetrisch belasteten 1-kV-Drehstromleitung wird ein Strom von 525 A bei einem Wirkleistungsfaktor von 0,87 ermittelt. Wie groß ist die übertragene Wirkleistung?

**4.** Ein Drehstrommotor gibt bei 6 kV Netzspannung, 87% Wirkungsgrad und einem Wirkleistungsfaktor von 0,85 eine Wirkleistung von 5,3 MW ab. Wie groß ist der Strom in der Zuleitung?

**5.** Drei Heizwiderstände mit jeweils 100 Ω sind an das 400-V-Drehstromnetz angeschlossen. Wie groß ist jeweils bei Stern- und bei Dreieckschaltung
- **a)** die Spannung an den Widerständen,
- **b)** der Strom in der Zuleitung,
- **c)** die Wirkleistungsaufnahme eines Widerstandes und
- **d)** die gesamte Wirkleistungsaufnahme der Schaltung?

**6.** Ein Elektrowärmegerät in Sternschaltung nimmt am 400-V-Drehstromnetz 6,6 kW auf.
- **a)** Wie groß ist die Strangleistung?
- **b)** Wie groß ist der Strom in der Zuleitung?
- **c)** Welchen Widerstandswert hat ein Strang des Elektrogerätes?

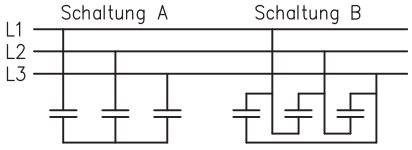
**7.** Am 400-V-Drehstromnetz nimmt ein Durchlauferhitzer in Dreieckschaltung 18 kW auf.
- **a)** Wie groß ist die Strangleistung?
- **b)** Wie groß ist der Strom in einem Heizstrang?
- **c)** Welchen Widerstandwert hat ein Strang?

**8.** In der Zuleitung eines symmetrisch belasteten 1-kV-Drehstromnetzes fließen 125 A bei einem Leistungsfaktor von 0,88. Wie groß ist die übertragene Schein-, Wirk- und Blindleistung?

**9.** Drei gleiche Spulen mit $R = 100\,\Omega$ und $L = 0{,}2\,\text{H}$ sind in Dreieck an ein Drehstromnetz 1 kV/50 Hz angeschlossen.
- **a)** Wie groß ist der Scheinwiderstand einer Spule?
- **b)** Wie groß ist der Strom durch eine Spule und in der Zuleitung?
- **c)** Welche Wirkleistung nimmt die Schaltung auf?
- **d)** Wie groß ist der Strom in der Zuleitung bei Sternschaltung der Spulen?

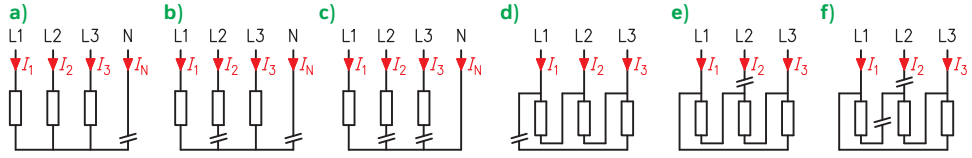
**10.** Drei gleiche Spulen liegen in Sternschaltung am Drehstromnetz 400 V/50 Hz. Bei einem Wirkleistungsfaktor von 0,7 fließen 3 A in der Zuleitung.
- **a)** Welche Wirkleistung nimmt die Schaltung auf?
- **b)** Wie groß sind der Wirkwiderstand und die Induktivität einer Spule?

**11.** Drei 100-µF-Kondensatoren werden an ein Drehstromnetz 400 V/230 V, 50 Hz angeschlossen. Wie groß ist jeweils bei beiden Schaltungen
- **a)** der Strangstrom,
- **b)** der Strom in der Zuleitung,
- **c)** die gesamte Blindleistungsaufnahme?




**12.** Ein Heizofen an 400 V wird von Stern auf Dreieck umgeschaltet. Dabei erhöht sich die Leistungsaufnahme um 2,5 kW. Wie groß ist
- **a)** die Leistungsaufnahme bei Sternschaltung,
- **b)** der Widerstand der Heizwiderstände?

**13.** Drei 50-Ω-Widerstände sind an ein 400-V/230-V-Drehstromnetz angeschlossen. Wie groß sind bei den jeweiligen Fehlern die Ströme in der Zuleitung und die Gesamtleistung?

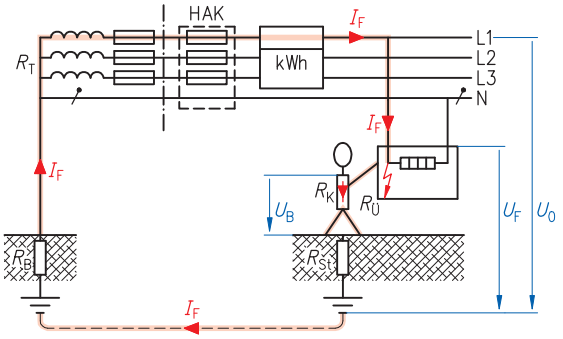



**14.** Innerhalb von 2,5 Stunden werden 80 Liter Wasser von 13 °C auf 90 °C in einem Heißwasserspeicher erwärmt. Dieser Speicher ist in Dreieckschaltung an ein 400-V-Netz angeschlossen. Der Nutzungsgrad wurde mit 87% angegeben.
- **a)** Wie groß ist die Leistungsaufnahme?
- **b)** Welchen Widerstandswert haben die Heizstäbe?

# 10 Elektrische Anlagen der Haustechnik

## 10.1 Schutzmaßnahmen nach DIN VDE 0100

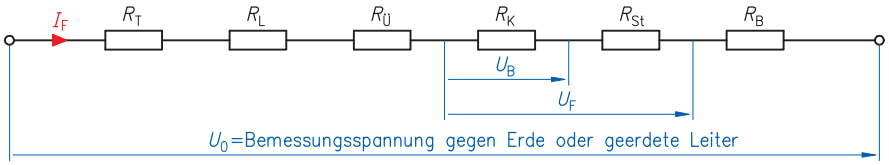
### 10.1.1 Kenngrößen




**Fehlerstromkreis:**

$I_F$: Fehlerstrom
$R_T$: Transformatorwiderstand
$R_L$: Leitungswiderstand
$R_Ü$: Übergangswiderstand
$R_K$: Körperwiderstand
$R_{ST}$: Standortwiderstand
$R_B$: Erdungswiderstand

| Berührungsspannung | Fehlerstrom | Fehlerspannung |
|---|---|---|
| $U_B = I_F \cdot R_K$ | $I_F = \frac{U_0}{R_g}$ | $U_F = I_F \cdot (R_K + R_{St})$ |




Grenzwerte für zulässige Berührungsspannungen $U_L$ ⇒ AC 50 V und DC 120 V

**Aufgaben**

**Beispiel:** Ein Elektroinstallateur steht auf einem isolierenden Fußboden ($R_{St} = 250\,\Omega$) und berührt mit einer Hand ($R_K = 1\,k\Omega$) am 230-V-Wechselstromnetz den spannungsführenden Leiter ($R_T = 20\,m\Omega$; $R_L = 2\Omega$; $R_B = 980\,m\Omega$).

**a)** Wie groß sind Fehlerstrom und Fehlerspannung?

**b)** Wie groß ist der Fehlerstrom über den menschlichen Körper und die Berührungsspannung, wenn er mit der anderen Hand ($R_K = 1\,k\Omega$) gleichzeitig den Neutralleiter berührt?

*Gegeben:* $U_0 = 230\,V$; $R_{St} = 250\,k\Omega$; $R_K = 1\,k\Omega$; $R_T = 20\,m\Omega$; $R_L = 2\Omega$; $R_B = 980\,m\Omega$

*Gesucht:* $I_{F1}$; $U_{F1}$; $I_{F2}$; $U_{F2}$

*Lösung:*

**a)** $R_{g1} = R_T + R_L + R_K + R_{St} + R_B = (0{,}02 + 2 + 1000 + 250 \cdot 10^3 + 0{,}98)\,\Omega = 251{,}003\,\Omega$

$$I_{F1} = \frac{U_0}{R_{g1}} = \frac{230\,V}{251{,}003\,k\Omega} = \mathbf{916{,}32\,\mu A}$$

$U_B = I_{F1} \cdot R_K = 916{,}32 \cdot 10^{-6}\,A \cdot 1\,000\,\Omega = \mathbf{0{,}915\,V}$

**b)** $R_{g2} = R_T \cdot 2R_L + R_K = (0{,}02 + 4 + 1\,500)\,\Omega = 1504{,}02\,\Omega$

$$I_{F2} = \frac{U_0}{R_{g2}} = \frac{230\,V}{1504{,}02\,\Omega} = \mathbf{153\,mA}$$

$U_{B2} = I_{F2} \cdot R_K = 153\,mA \cdot 1\,000\,\Omega = \mathbf{153\,V}$

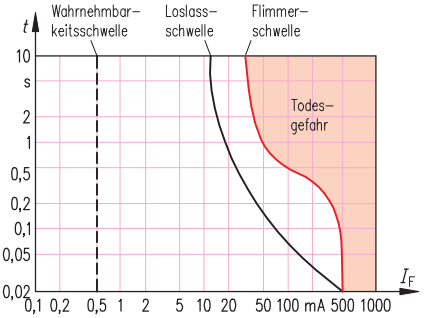
**1.** Der Gesamtwiderstand eines Fehlerstromkreises beträgt 5,75 kΩ. Wie hoch ist der Fehlerstrom im Wechselstromnetz 230 V/50 Hz?

**2.** Bei einem durch Isolationsfehler auftretenden Körperschluss fließt über den menschlichen Körper ein Strom von 5 mA. Der Standortwiderstand beträgt 21,4 kΩ. Wie hoch ist die Fehlerspannung, wenn der Widerstand des menschlichen Körpers 1 kΩ beträgt?

**3.** Der Körperwiderstand des Menschen (linke Hand – Füße) wird mit 1 000 Ω angenommen. Welcher Fehlerstrom tritt bei der dauernd zulässigen Berührungsspannung auf
- **a)** bei Wechselstrom,
- **b)** bei Gleichstrom?

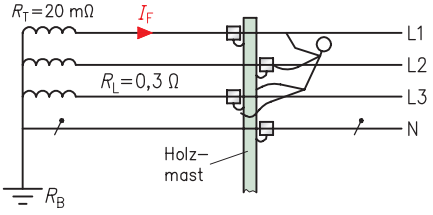
**4.** Bei Arbeiten mit einem defekten elektrischen Bügeleisen erlitt eine Person einen elektrischen Unfall. Durch an-schließende Messungen wurden folgende Werte ermittelt: Bemessungsspannung gegen geerdete Leiter: 228 V, Transformatorwiderstand: 15 mΩ, Leiterwiderstand: 0,75 Ω, Widerstand des Betriebserders: 0,55 Ω, Standortwiderstand: 3 kΩ, Fehlerwiderstand : 285 Ω.
- **a)** Wie hoch war der durch den menschlichen Körper fließende Strom, wenn der Körperwiderstand mit 1000 Ω angenommen wird?
- **b)** Nach welcher Zeit kann dieser Strom tödliche Folgen haben?
- **c)** Wie groß war die Fehlerspannung?
- **d)** Welche Spannung wurde vom menschlichen Körper überbrückt?

für Erwachsene
(Stromweg: linke Hand — Füße)




**5.** Bei einer routinemäßigen Kontrolle im Wechselstromnetz 230 V/50 Hz wurde wegen einer fehlerhaften Isolation zwischen Körper und spannungsführendem Geräteteil (Körperschluss) ein Widerstand von 150 Ω gemessen. Welcher Standortwiderstand ist bei einem Körperwiderstand von 1400 Ω mindestens notwendig, damit die dauernd zulässige Berührungsspannung nicht überschritten wird?

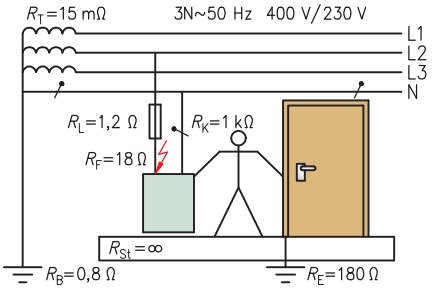
**6.** Bei Arbeiten am Drehstromnetz 400/230 V überbrückt ein Monteur zwei Außenleiter.
- **a)** Welcher Fehlerstrom fließt bei einem Körperwiderstand von 1500 Ω?
- **b)** Nach welcher Zeit kann dieser Strom tödlich sein?
- **c)** Welche Spannung überbrückt der Monteur?



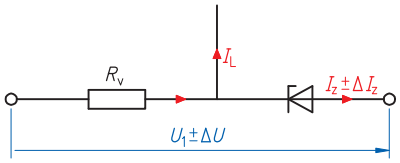

**7.** Im 230-V/50-Hz-Wechselstromnetz fließt ein Fehlerstrom von 9 mA.
- **a)** Nach welcher Zeit wird die Loslassgrenze erreicht?
- **b)** Welchen Gesamtwiderstand hat der Fehlerstromkreis?
- **c)** Wie hoch wird der Fehlerstrom, wenn sich durch ungünstige Umstände der Gesamtwiderstand um 7,5 kΩ verringert?

**8.** Ein Elektroinstallateur steht auf einem isolierenden Fußboden ($R_{St}$ = 250 kΩ) und berührt mit einer Hand ($R_K$ = 1000 Ω) den spannungsführenden Leiter ($R_T$ = 20 mΩ; $R_L$ = 2Ω; $R_B$ = 980 mΩ) des 230-V-Wechselspannungsnetzes. Wie groß sind Fehlerstrom und Berührungsspannung?

**9.** Eine Person berührt gleichzeitig das Gehäuse einer Waschmaschine mit Körperschluss und eine Stahl-Türzarge.
- **a)** Wie groß wird der Fehlerstrom?
- **b)** Nach welcher Zeit kann dieser Strom tödlich sein?
- **c)** Welche Spannung überbrückt der menschliche Körper?
- **d)** Wie hoch ist die Fehlerspannung?



## 12.1.3 Z-Dioden (Spannungsstabilisierung)

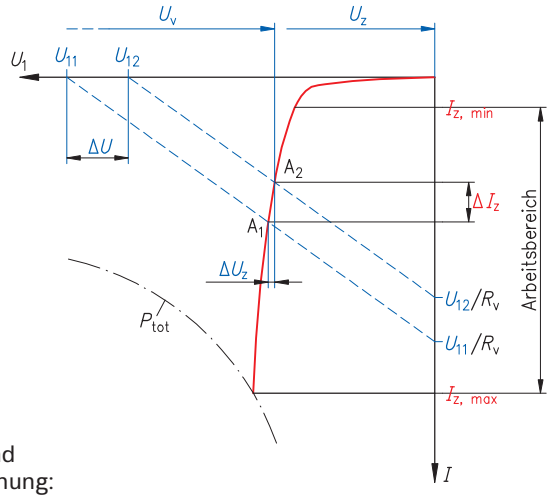



**Verlustfreie $P_{tot}$**

$$P_{tot} = I_{Z,max} \cdot U_Z$$

**Notwendiger Vorwiderstand $R_v$**

$$R_v = \frac{U_1 - U_Z}{I_L + I_Z}$$




Bei veränderlicher Last und veränderlicher Eingangsspannung:

**Kleinster Vorwiderstand $R_{v,min}$**

$$R_{v,min} = \frac{U_{1,max} - U_Z}{I_{Z,max} + I_{L,min}}$$

**Größter Vorwiderstand $R_{v,max}$**

$$R_{v,max} = \frac{U_{1,min} - U_z}{I_{Z,min} + I_{L,max}}$$

### Aufgaben

**Beispiel:** Die Spannung an einem hochohmigen Verbraucher wird durch eine Z-Diode mit der abgebildeten Kennlinie stabilisiert. Die Betriebsspannung schwankt zwischen 6 V und 8 V. Der Vorwiderstand beträgt 100 Ω. Wie groß ist die Spannungsänderung am Verbraucher?

*Gegeben:* $U_{1min} = 6\,V$; $U_{1max} = 8\,V$; $R_v = 100\,\Omega$

*Gesucht:* $\Delta U_Z$

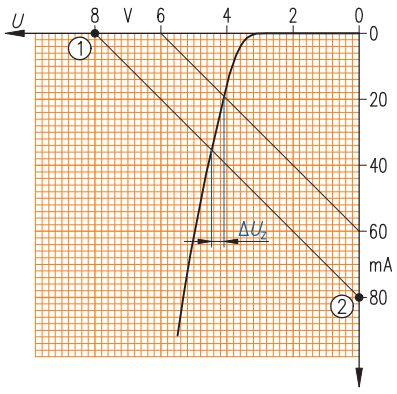
*Lösung:* Konstruktion der Arbeitsgeraden:

Punkt 1: $U_Z = 8\,V$; $I_Z = 0\,A$

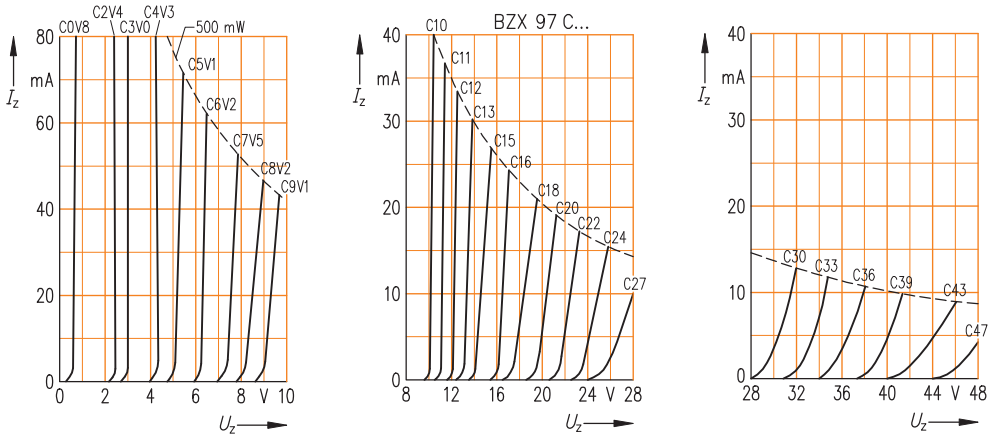
Punkt 2: $I_Z = \frac{U_{1max}}{R_v} = \frac{8\,V}{100\,\Omega} = 80\,mA$

$U_Z = 0\,V$

Abgelesener Wert: $\Delta U_Z =$ **0,3 V**



**Kennlinien der Z-Diode BZX 97 C zu den Aufgaben**




**1.** Die Z-Diode BZX 97 C5V1 liegt mit einem 125-Ω-Widerstand in Reihe an 10 V.
- **a)** Wie groß sind Zenerstrom und Verlustleistung der Z-Diode?
- **b)** Wie ändern sich Zenerstrom und Diodenverlustleistung, wenn die Schaltung an 8 V liegt?

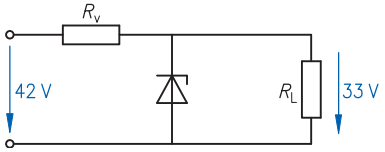
**2.** Ein 7-kΩ-Lastwiderstand liegt parallel zu der Z-Diode BZX 97 C15. Es fließt ein Zenerstrom von 10 mA. Die Stabilisierungsschaltung liegt an 24 V.
- **a)** Welche Ströme fließen durch Lastwiderstand und Vorwiderstand?
- **b)** Wie groß ist der Vorwiderstand?

**3.** An einer Reihenschaltung aus Z-Diode BZX 97 C20 und 700-Ω-Widerstand liegen $26\,V \pm 2\,V$. Welche Grenzwerte hat die stabilisierte Spannung?

**4.** Eine Z-Diode mit 15 V Zenerspannung liegt mit einem Vorwiderstand an $20\,V \pm 15\,\%$. Der Arbeitsbereich der Z-Diode liegt zwischen 5 mA und 25 mA. Zwischen welchen Werten muss der Vorwiderstand liegen?

**5.** Eine Stabilisierungsschaltung mit einer Z-Diode für 4 V soll an Spannungen von 8 V–10 V betrieben und mit 0 mA–20 mA belastet werden. Der Arbeitsbereich der Diode soll zwischen 10 mA und 70 mA liegen.
- **a)** Zwischen welchen Werten darf der Vorwiderstand liegen?
- **b)** Welcher Vorwiderstand der Reihe E6 (siehe Tabelle S. 210) muss ausgewählt werden?
- **c)** Welche Leistung nimmt dieser Widerstand maximal auf?

**6.** Bei 42 V Eingangsspannung liegen 33 V am 33-kΩ-Lastwiderstand einer Stabilisierungsschaltung mit der Z-Diode BZX 97 C33 an.
- **a)** Wie groß ist der Vorwiderstand?
- **b)** An welcher Spannung liegt die Z-Diode, wenn die Last abgeschaltet ist?




**7.** Die Ausgangsspannung eines Netzteiles schwankt zwischen 4 V und 4,5 V. Mit der Z-Diode BZX 97 C3V0 soll sie für Stromentnahmen bis 20 mA stabilisiert werden. Der Arbeitsbereich der Z-Diode liegt zwischen 10 mA und 70 mA.
- **a)** Welcher Vorwiderstand der Reihe E 12 ist auszuwählen?
- **b)** Für welche Verlustleistung muss der Vorwiderstand bemessen sein?
- **c)** Bis zu welchem Laststrom stabilisiert die Schaltung bei dem gewählten Vorwiderstand?
- **d)** Bis zu welchem Laststrom kann die Schaltung stabilisieren, wenn der kleinstmögliche Widerstand der Reihe E 12 (siehe Tabelle S. 210) eingebaut wird?

**8.** Ein hochwertiges Netzgerät liefert eine stabilisierte Spannung von 20 V. Es soll ein 18-V-Betriebsmittel, das die Ströme von 0–10 mA benötigt, mit der notwendigen Energie versorgen. Zur Stabilisierung wird eine Z-Diode BZX 97 C18 verwendet, deren Arbeitsbereich zwischen 5 mA und 20 mA liegt.
- **a)** Welcher Vorwiderstand der Reihe E 48 (siehe Tabelle S. 211) ist zu bevorzugen?
- **b)** Wie groß ist die Spannung am Betriebsmittel, wenn kein Laststrom fließt?
- **c)** Welche Leistung nimmt der Vorwiderstand im Leerlaufbetrieb auf?

## 13.1.4 Vereinfachung von Schaltnetzen

### 13.1.4.1 KV-Tafeln (Karnaugh und Veitch)

**Mithilfe von KV-Tafeln lassen sich logische Schaltungen einfach minimieren.**

- Funktionstabelle in die KV-Tafel übertragen
- Benachbarte Felder gleicher Wertigkeit werden zu $2^n$ großen Blöcken zusammengefasst
- Einzelne Felder können mehrfach in Blöcken verwendet werden.
- Eingangsvariable heben sich in benachbarten Feldern auf.
- Die Inhalte der 1er-Blöcke mit ∨ verknüpft, ergibt die vereinfachte Funktionsgleichung für A = 1.
- Die Inhalte der 0er-Blöcke mit ∧ verknüpft, ergibt die vereinfachte Funktionsgleichung für A = 0.

Funktionsgleichung: disjunktive Normalform

$(\overline{E0} \wedge \overline{E1} \wedge E2) \vee (\overline{E0} \wedge E1 \wedge E2) \vee (E0 \wedge \overline{E1} \wedge \overline{E2} \vee (E0 \wedge \overline{E1} \wedge E2) \vee (E0 \wedge E1 \wedge \overline{E2}) \vee (E0 \wedge E1 \wedge E2) = A$

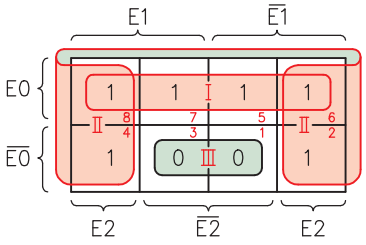
⇓

Funktionstabelle

| E0 | E1 | E2 | A |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 2 |
| 0 | 1 | 0 | 0 3 |
| 0 | 1 | 1 | 1 4 |
| 1 | 0 | 0 | 1 5 |
| 1 | 0 | 1 | 1 6 |
| 1 | 1 | 0 | 1 7 |
| 1 | 1 | 1 | 1 8 |

⇒

KV-Tafel




⇒

Vereinfachte Funktionsgleichung

Block I Block II

Für A = 1 ⇒ $A = E0 \vee E2$

⇩ ⇩

De Morgan

⇩ ⇩

Für A = 0 ⇒ $\overline{A} = \overline{E0} \wedge \overline{E2}$

Block III

## Aufgaben

**Beispiel:** Wie sieht die mithilfe der KV-Tafel minimierte Schaltung der gegebenen Funktion aus?

*Gegeben:* $(\overline{E0} \wedge \overline{E1} \wedge \overline{E2} \wedge E3) \vee (\overline{E0} \wedge \overline{E1} \wedge E2 \wedge E3) \vee (\overline{E0} \wedge E1 \wedge \overline{E2} \wedge \overline{E3}) \vee$
$(E0 \wedge \overline{E1} \wedge \overline{E2} \wedge \overline{E3}) \vee (E0 \wedge \overline{E1} \wedge \overline{E2} \wedge E3) \vee (E0 \wedge \overline{E1} \wedge E2 \wedge \overline{E3}) \vee$
$(E0 \wedge \overline{E1} \wedge E2 \wedge E3) \vee (E0 \wedge E1 \wedge \overline{E2} \wedge E3) \vee (E0 \wedge E1 \wedge E2 \wedge E3) = A$

*Lösung:*

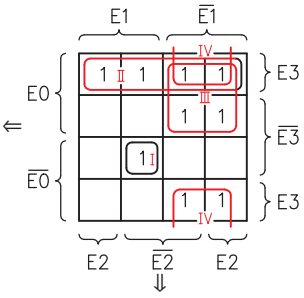
⇓

Funktionstabelle

| E0 | E1 | E2 | E3 | A |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

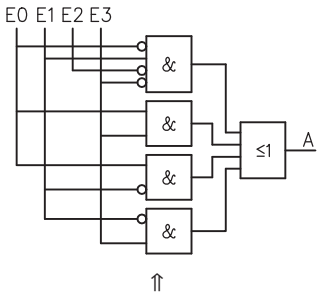
⇐

KV-Tafel




⇓

Minimierte Schaltung




⇑

Vereinfachte Funktionsgleichung

Block I Block II Block III Block IV

$(\overline{E0} \wedge E1 \wedge \overline{E2} \wedge \overline{E3}) \vee (E0 \wedge E3) \vee (E0 \wedge \overline{E1}) \vee (\overline{E1} \wedge E3) = A$

**1.** Welche Funktionsgleichungen und logischen Schaltungen ergeben sich für die KV-Tafeln nach der Zusammenfassung zu Blöcken?

**a)**

| | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|
| E0 | | 1 |
| $\overline{E0}$ | | 1 |

**b)**

| | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|
| E0 | 1 | 1 |
| $\overline{E0}$ | | |

**c)**

| | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|
| E0 | 1 | |
| $\overline{E0}$ | 1 | |

**d)**

| | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|
| E0 | 1 | |
| $\overline{E0}$ | 1 | 1 |

**e)**

| | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|
| E0 | 1 | 1 |
| $\overline{E0}$ | | 1 |

**f)**

| | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|
| E0 | 1 | 1 |
| $\overline{E0}$ | 1 | |

**g)**

| | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|
| E0 | | 1 |
| $\overline{E0}$ | 1 | 1 |

**2.** Welche vereinfachten logischen Schaltungen ergeben sich für die KV-Tafeln?

**a)**

| | E1 | $\overline{E1}$ | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|---|---|
| E0 | 1 | | 1 | 1 |
| $\overline{E0}$ | 1 | | | |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**b)**

| | E1 | $\overline{E1}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| E0 | 1 | 1 | | |
| $\overline{E0}$ | 1 | 1 | | |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**c)**

| | E1 | $\overline{E1}$ | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|---|---|
| E0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\overline{E0}$ | | | 1 | |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**d)**

| | E1 | $\overline{E1}$ | E1 | $\overline{E1}$ |
|---|---|---|---|---|
| E0 | 1 | 1 | 1 | |
| $\overline{E0}$ | | | 1 | |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**e)**

| | E1 | $\overline{E1}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| E0 | 1 | 1 | | |
| $\overline{E0}$ | | | 1 | 1 |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**3.** Für die nachfolgenden KV-Tafeln sind die minimierten logischen Schaltungen gesucht.

**a)**

| | E1 | $\overline{E1}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| E0 | | | 1 | E3 |
| | | | 1 | $\overline{E3}$ |
| $\overline{E0}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | E3 |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**b)**

| | E1 | $\overline{E1}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| E0 | | | 1 | E3 |
| | 1 | 1 | | $\overline{E3}$ |
| $\overline{E0}$ | 1 | 1 | | E3 |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**c)**

| | E1 | $\overline{E1}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| E0 | | | 1 | E3 |
| | 1 | 1 | | $\overline{E3}$ |
| $\overline{E0}$ | 1 | | | E3 |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**d)**

| | E1 | $\overline{E1}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| E0 | 1 | 1 | 1 | E3 |
| | | 1 | 1 | $\overline{E3}$ |
| $\overline{E0}$ | 1 | 1 | 1 | E3 |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**e)**

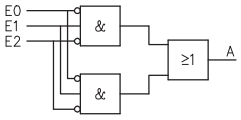
| | E1 | $\overline{E1}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| E0 | 1 | | | 1 | E3 |
| | | 1 | 1 | | $\overline{E3}$ |
| $\overline{E0}$ | 1 | | | 1 | E3 |
| | E2 | $\overline{E2}$ | E2 | |

**4.** Die vorliegende Schaltung ist schrittweise mithilfe einer KV-Tafel zu vereinfachen.

**a)** Wie sieht die Funktionsgleichung der gegebenen logischen Schaltung aus?

**b)** Welche vereinfachte Funktionsgleichung ergeben die Blöcke der KV-Tafel?

**c)** Wie sieht die vereinfachte logische Schaltung aus?

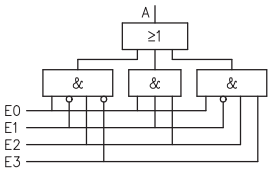



**5.** Wie lautet die Lösung zur dargestellten logischen Schaltung für

**a)** die Funktionsgleichung,

**b)** die vereinfachte Gleichung,

**c)** die vereinfachte logische Schaltung?



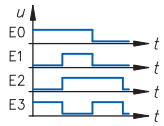

**6.** Bei den gegebenen Eingangszuständen liegt an den Ausgänge A = 1 an.

– Wie lauten die Funktionsgleichungen für die Schaltungen?

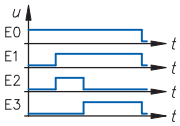
– Welche vereinfachten Funktionsgleichungen ergeben sich mithilfe der KV-Tafel?

– Wie sehen die logischen Schaltungen dann aus?

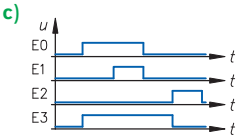
**a)**



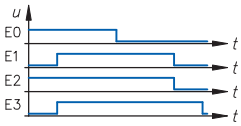

**b)**




**c)**




**d)**




**7. a)** Wie lautet die mit der KV-Tafel vereinfachte Funktionsgleichung?

**b)** Welche logische Schaltung ergibt sich aus der Gleichung?

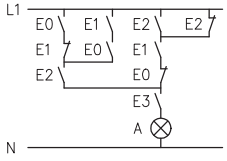
$$(E0 \wedge E1 \wedge \overline{E2} \wedge \overline{E3}) \vee (\overline{E0} \wedge E1 \wedge \overline{E2} \wedge \overline{E3}) \vee (E0 \wedge E1 \wedge \overline{E2} \wedge E3) \vee (\overline{E0} \wedge E1 \wedge \overline{E2} \wedge E3) \vee$$
$$(E0 \wedge \overline{E1} \wedge \overline{E2} \wedge E3) \vee (E0 \wedge \overline{E1} \wedge E2 \wedge E3) \vee (\overline{E0} \wedge \overline{E1} \wedge E2 \wedge E3) \vee (\overline{E0} \wedge \overline{E1} \wedge \overline{E2} \wedge \overline{E3}) \vee$$
$$(E0 \wedge \overline{E1} \wedge \overline{E2} \wedge \overline{E3}) \vee (E0 \wedge \overline{E1} \wedge E2 \wedge \overline{E3}) \vee (\overline{E0} \wedge \overline{E1} \wedge E2 \wedge \overline{E3}) \vee (\overline{E0} \wedge \overline{E1} \wedge \overline{E2} \wedge \overline{E3}) = A$$

**8. a)** Wie lautet die Funktionsgleichung für die Schaltung mit Schaltkontakten?

**b)** Welche Funktionstabelle entspricht der Schaltung?

**c)** Wie lautet die Funktionsgleichung nach der Vereinfachung mit der KV-Tafel?

**d)** Wie sieht dann die logische Schaltung aus?



# Bildquellenverzeichnis

**Zeichnungen**

Bild und Technik Michele Di Gaspare, Bergheim