2 Analytische Geometrie

Gleichungssysteme

Bevor wir in das Thema *analytische Geometrie* einsteigen, wollen wir das Lösen linearer Gleichungssysteme behandeln. Besonders das Additionsverfahren wird dir für viele Aufgabensituationen ein wichtiges Hilfsmittel sein.

ZENTRALE BEGRIFFE

- **Lineares Gleichungssystem (LGS):** Beliebig große Menge linearer Gleichungen, bestehend z. B. aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (2×2) oder aus drei Gleichungen mit vier Unbekannten (3×4).
- **Lösbarkeit:** LGS können entweder keine, eine oder mehrere Lösungen haben. Die maximale Anzahl an Lösungen hängt von der Art des LGS ab.
- **Lösung eines LGS:** Diejenigen Werte, für die jede der n Gleichungen zugleich erfüllt ist.
- **überbestimmtes LGS:** Anzahl der Gleichungen ist größer als Anzahl verschiedener Variablen.
- **unterbestimmtes LGS:** Anzahl der Gleichungen ist geringer als Anzahl verschiedener Variablen. Meist gibt es dann eher einen Lösungsbereich anstatt konkreter Lösungen.
- **Geometrische Interpretation:** Die Lösungen eines 2×2 LGS entsprechen den Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen beider linearer Funktionen, bei 3×3 entsprechend den Koordinaten des Schnittpunktes dreier Ebenen im Raum.

BEISPIEL

Gegeben sind folgende Gleichungssysteme. Entscheide jeweils, ob das LGS unterbestimmt oder überbestimmt ist oder keiner der beiden Fälle vorliegt.

a) I: $6a + 12b = 30$
II: $3a + 3b = 9$

b) I: $2x + 3y + 6z = 5$
II: $-2x + 3y - 4z = 1$

c) I: $x + y = 10$
II: $x + 2y = 16$
III: $3x - 5y = -18$

Lösung:

a) Weder unter- noch überbestimmt, da die Anzahl der Gleichungen der Anzahl der Variablen entspricht.
b) Unterbestimmt, da es weniger Gleichungen als Unbekannte gibt.
c) Überbestimmt, da die Anzahl der Gleichungen größer ist als die Anzahl der Variablen.

Übersicht zu den LGS

LGS-Typ	Lösungsvorschlag	typisches Vorkommen	Beispiel
1 Gleichung 1 Variable	**Einsetzungsverfahren** Ordnen, gegebenenfalls Variable ausklammern und die Variablen berechnen.	Schnitt Gerade – Ebene in Koordinatenform	$E\colon\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0;$ $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow\ 2(2+4t) - 2(-5-2t) - (3+t) = 0$ $\Rightarrow\ t = -1\ \Rightarrow\ S(-2\,\vert\,-3\,\vert\,2)$
1 Gleichung 2 Variablen	**Einsetzungsverfahren** Ordnen, eine der Variablen isolieren und berechnen (in Abhängigkeit zu der anderen Variablen).	Schnitt Ebene in Parameterform mit Ebene in Koordinatenform	$E_1\colon\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 12 = 0$ $E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow\ 2(-r+3s) + (-2-3r-5s)$ $+3(7+4r+9s) - 12 = 0$ $\Rightarrow\ r = -4s - 1$ $\Rightarrow\ g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$
1 Gleichung 3 Variablen	Zwei der Variablen beliebig (aber sinnvoll) einsetzen und die dritte Variable berechnen.	Aufsuchen von Punkten auf einer Ebene in Koordinatenform, Vektor orthogonal zum gegebenen Vektor	$E_1\colon\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 12 = 0$ mit $x_2 = 1,\ x_3 = 5\ \Rightarrow\ P(-2\,\vert\,1\,\vert\,5);$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\Rightarrow\ a + 2b + 3c = 0$ mit $a = 1,\ b = 2\ \Rightarrow\ c = -\frac{5}{3}$
2 Gleichungen 1 Variable	Aus 1. Gleichung Variable berechnen und das Ergebnis in die 2. einsetzen.	bei drei Gleichungen und zwei Variablen	$2x - 3 = 5;\ -x + 4 = 9$ aus Gleichung 1 $\Rightarrow\ x = 4$ eingesetzt $\Rightarrow$ $-4 + 4 = 9$ also $0 = 9$ und damit keine Lösung
2 Gleichungen 2 Variablen	**Gleichsetzungsverfahren** Eine Variable eliminieren, die andere Variable berechnen.	häufigstes LGS der Analysis, z. B. Schnitt zweier Geraden	$y = 2x + 4;\ y = -x + 5$ $\Rightarrow\ 2x + 4 = -x + 5\ \Rightarrow\ 3x = 1$ $\Rightarrow\ x = \frac{1}{3}\ \Rightarrow\ y = \frac{14}{3}\ \Rightarrow\ S\left(\frac{1}{3}\,\middle\vert\,\frac{14}{3}\right)$

LGS-Typ	Lösungsvorschlag	typisches Vorkommen	Beispiel
2 Gleichungen 3 Variablen	Eine Variable eliminieren, ergibt eine Gleichung mit zwei Variablen. Dann Bestimmung einer Variablen in Abhängigkeit der anderen.	Schnitt zweier Ebenen in Koordinatenform, Bestimmung eines Normalenvektors einer Ebene in Parameterform	E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $3n_1 + n_2 - n_3 = 0$ $n_1 - n_2 - n_3 = 0$ $\Rightarrow 2n_1 + 2n_2 = 0$ $\Rightarrow n_2 = -n_1;\ n_3 = 2n_1$
3 Gleichungen 1 Variablen	Aus einer Gleichung die Variable berechnen und in beide anderen Gleichungen einsetzen. Lösung nur, wenn alle Gleichungen erfüllt sind.	Nachprüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Geraden liegt.	$P(2\|-1\|3)$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{matrix} \text{I:} & 2 = 1 - 2t \\ \text{II:} & -1 = 2 + t \\ \text{III:} & 3 = 3 + 4t \end{matrix}$ $\Rightarrow$ keine Lösung
3 Gleichungen 2 Variablen	Aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen die Variablen berechnen und in die dritte Gleichung einsetzen.	Schnitt zweier Geraden, lineare Unabhängigkeit dreier Vektoren	$\Rightarrow \begin{matrix} \text{I:} & 3 + t = 4 - s \\ \text{II:} & -2 + 2t = -2s \\ \text{III:} & 1 - 3t = 2 + s \end{matrix}$ $\Rightarrow s = 2,\ t = -1$
3 Gleichungen 3 Variablen	**Additionsverfahren** Durch Eliminieren der Variablen über zwei Gleichungen mit zwei Variablen auf eine mit einer Variablen.	Schnitt Gerade mit Ebene in Parameterform	$\Rightarrow \begin{matrix} \text{I:} & 3 + r + 3s = -t \\ \text{II:} & 3 + r - 3s = 2 - 3t \\ \text{III:} & 1 - r - s = 7 + 4t \end{matrix}$ $\Rightarrow t = -\frac{11}{7}$
3 Gleichungen 4 Variablen	**Additionsverfahren** Über zwei Gleichungen mit drei Variablen und eine Gleichung mit zwei Variablen.	Schnitt zweier Ebenen in Parameterform	$3 + r + 3s = -u + 3v$ $3 + r - 3s = -2 - 3u - 5v$ $1 - r - s = 7 + 4u + 9v$ $v \in \mathbb{R};\ s = 0;\ r = -2 + 7v;\ u = -1 - 4v$

Einsetzungsverfahren

Wenn du in der Lage bist, Terme sicher für Variablen einzusetzen, wird dir das Einsetzungsverfahren nicht schwer fallen.

① Du wählst eine der Gleichungen aus und formst diese nach einer Unbekannten um.
② Du setzt den Wert der Variablen in die andere Gleichung ein.
③ Du vereinfachst soweit wie möglich und berechnest den Wert der ersten Variablen.
④ Du setzt den gerade berechneten Wert in eine der Gleichungen ein und berechnest den Wert der anderen Variablen.

BEISPIEL

Löse das LGS mit dem Einsetzungsverfahren. Mache anschließend eine Probe und beurteile abschließend, inwieweit das Einsetzungsverfahren effizient anwendbar war.

I: $6a + 12b = 30$
II: $3a + 3b = 9$

Lösung:

II: $3a + 3b = 9$	$\mid :3$	Auswählen und Umstellen einer Gleichung
II: $a + b = 3$	$\mid -b$	nach einer Variablen
II: $a = 3 - b$		
$a = (3-b)$ in I:		
I: $6(3-b) + 12b = 30$		Ersetzen der Variable a durch $(3-b)$
I: $18 - 6b + 12b = 30$		
I: $18 + 6b = 30$	$\mid -18$	
$6b = 12$	$\mid :6$	
$\mathbf{b = 2}$		
		Zusammenfassen liefert $b = 2$
$b = 2$ in (z. B.) II:		Einsetzen von $b = 2$ in eine beliebige Gleichung
$3a + 6 = 9$	$\mid -6$	
$3a = 3$	$\mid :3$	
$\mathbf{a = 1}$		Umformen liefert $a = 1$
$\mathbf{L = (1 \mid 2)}$		Lösungsmenge notieren
$a = 1,\ b = 2$ in II:		Probe durch Rückeinsetzen der berechneten
$3 + 6 = 9$		Variablen in allen Gleichungen.
$9 = 9$		Wahre Aussagen zeigen korrekte Lösungen.

Fazit: Da sich Gleichung II recht schnell nach einer Unbekannten umformen ließ, konnte das Einsetzungsverfahren sinnvoll angewendet werden.