Elemente der Mathematik

EdM

SACHSEN

10. Schuljahr
Lösungen

Herausgegeben von
Heinz Griesel
Helmut Postel
Friedrich Suhr
Werner Ladenthin
Matthias Lösche

Schroedel
westermann

ELEMENTE DER MATHEMATIK 10
Sachsen
Lösungen zum Schülerband Best.-Nr. 87510

Herausgegeben und bearbeitet von
Prof. Dr. Heinz Griesel, Prof. Helmut Postel, Friedrich Suhr, Werner Ladenthin, Matthias Lösche

Bearbeitet von
Lutz Breidert, Gabriele Dybowski, Dr. Beate Goetz, Reinhard Kind,
Werner Ladenthin, Matthias Lösche, Kerstin Schäfer, Thomas Sperlich, Friedrich Suhr,
Prof. Dr. Hans-Georg Weigand, Ulrike Willms

Für Sachsen bearbeitet von
Angelika Barth, Dr. Roland Hagen, Annika Kiwatt, Sylvia Noack, Ines Petzschler,
Jens Spiegelhauer, Holger Wuschke

westermann GRUPPE

© 2017 Bildungshaus Schulbuchverlage
Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig
www.schroedel.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.
Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine Einwilligung gescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.
Für Verweise (Links) auf Internet-Adressen gilt folgender Haftungshinweis:
Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich. Sollten Sie daher auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail davon in Kenntnis zu setzen, damit beim Nachdruck der Verweis gelöscht wird.

Druck A[1] / Jahr 2017
Alle Drucke der Serie A sind parallel verwendbar.

Redaktion: Lena Schenk, Claus Peter Witt
Umschlagentwurf LIO Design GmbH, Braunschweig
Zeichnungen: Schlierf, Type & Design, Lachendorf; Langner & Partner, Hemmingen
Druck und Bindung: Westermann Druck GmbH, Braunschweig

ISBN 978-3-507-**87511**-1

Inhaltsverzeichnis

Bleib fit im … Umgang mit der Trigonometrie

9 **1.** Höhe der Leiter an der Wand: $h = \cos(31°) \cdot 3\,\text{m} \approx 2{,}53\,\text{m}$
Entfernung der Leiter von der Wand: $e = \sin(31°) \cdot 3\,\text{m} \approx 1{,}55\,\text{m}$

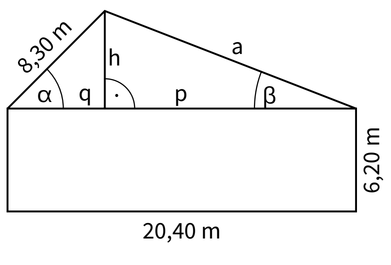
10 **2.** **a)** $\gamma = 70°$, $\overline{AB} \approx 5{,}4\,\text{cm}$, $\overline{AC} \approx 2{,}6\,\text{cm}$
b) $\beta \approx 33{,}7°$, $\gamma \approx 56{,}3°$, $\overline{BC} \approx 6{,}4\,\text{cm}$
c) $\alpha = \beta = 55°$, $\overline{AB} \approx 5{,}7\,\text{cm}$

3. **a)** Schieflage des Kirchturms:
$\tan(\alpha) = \frac{2{,}47\,\text{m}}{27{,}37\,\text{m}} \approx 0{,}0902$, also $\alpha \approx 5{,}2°$
Der Kirchturm weist eine größere Schieflage auf.
b) $x = \sin(5{,}2°) \cdot 11\,\text{m} \approx 0{,}99\,\text{m} \approx 1\,\text{m}$

4. Entfernung d vom Beobachtungspunkt zum Turm:
$d = 10{,}20\,\text{m} : \tan(6°) \approx 97{,}05\,\text{m}$
Höhe h des Gebäudes:
$h = 10{,}20\,\text{m} + d \cdot \tan(34°) \approx 75{,}66\,\text{m} \approx 76\,\text{m}$

5. **a)** $h \approx 2{,}27\,\text{m}$
b) Die Füße stehen ungefähr 2,11 m auseinander.
c) $\gamma \approx 53{,}7°$

6. $h = 11\,\text{m} - 6{,}20\,\text{m} = 4{,}80\,\text{m}$
$\sin(\alpha) = \frac{4{,}80\,\text{m}}{8{,}30\,\text{m}} \approx 0{,}5783$, also $\alpha \approx 35{,}3°$
$q = \sqrt{(8{,}30\,\text{m})^2 - (4{,}80\,\text{m})^2} \approx 6{,}77\,\text{m}$
$p = 20{,}40\,\text{m} - q \approx 13{,}63\,\text{m}$
$\tan(\beta) = \frac{h}{p} \approx 0{,}3522$, also $\beta \approx 19{,}4°$
$a = \sqrt{p^2 + h^2} \approx 14{,}45\,\text{m}$



Die Neigung der Dachsparren beträgt links etwa 35°, rechts etwa 19°.
Der rechte Dachsparren ist 14,45 m lang.

1. Modellieren periodischer Vorgänge

11 **Einstiegsseite:**

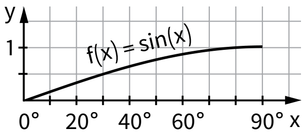
- ➜ Am Tag davor bzw. am Tag danach kann man ziemlich genau diesen Sonnenstand wieder beobachten
- ➜ Die Sonne verändert ihre Bahn im Laufe des Jahres, d. h. sie wird dann immer tiefer am Horizont stehen bzw. gar nicht zu sehen sein.
- ➜ Zwischenwerte sind sinnvoll. Die Kurve fällt zunächst bis zum tiefsten Punkt der Sonne, steigt dann bis zum höchsten Punkt an und fällt dann wieder. Dieser Vorgang wiederholt sich dann.

Lernfeld: Hin und her – rauf und runter

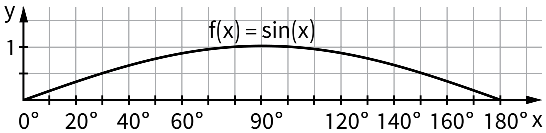
12 **1. Auftrag: Schwingen einer Spiralfeder**

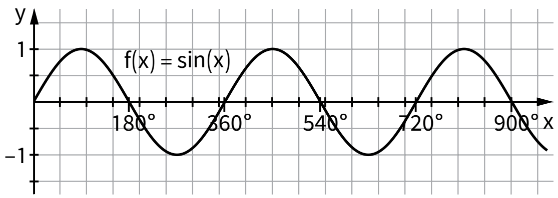
Anhand der Spiralfeder sieht man, dass es Vorgänge gibt, die sich in einem gewissen Zeitabstand wiederholen. Der Vorgang hier ist das Auf- und Abschwingen der Feder. Solche Vorgänge können sich im Wesentlichen durch die maximale Auslenkung, die Länge der Schwingungsdauer und die Verschiebung parallel zur zu den Achsen unterscheiden.

2. Auftrag: Entdeckungen an Sinuskurven

➜ 

Der Graph geht durch die Punkte O (0° | 0) und H (90° | 1). Von O bis H steigt er an.

➜ 



Die Nullstellen des Graphen sind bei 0°, 180°, 360°, 540°, 720°, 900°, …. Die höchsten Punkte liegen bei 90°, 450°, 810°, … Der Funktionswert liegt bei 1.Die tiefsten Punkte liegen bei 270°, 630°, 990°, … Der Funktionswert liegt bei – 1. Vom tiefsten Punkt steigt der Graph jeweils bis zum höchsten Punkt und fällt dann wieder bis zum tiefsten Punkt

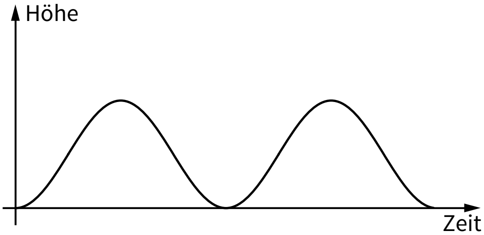
12 **2. Auftrag:** Fortsetzung

→ (1) Streckung bzw. Stauchung entlang der y-Achse
(2) Streckung bzw. Stauchung entlang der x-Achse
(3) Verschiebung entlang der x-Achse
(4) Verschiebung entlang der y-Achse

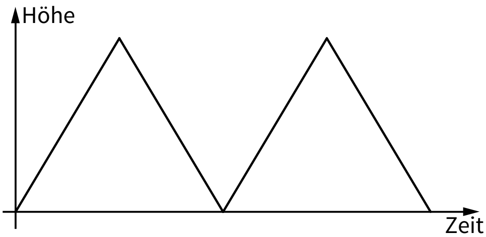
1.1 Periodische Vorgänge

13 **Einstieg:**

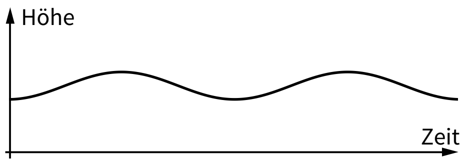
Sägezahn:



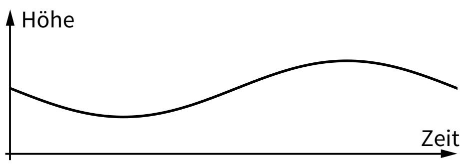
Kettenglied (Vereinfachung: Die Umlenkrolle wird nicht berücksichtigt):



15 **2.** a) (1)



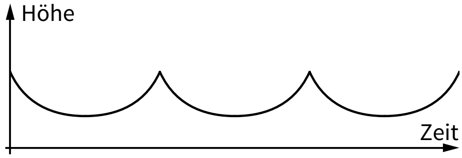
(2)



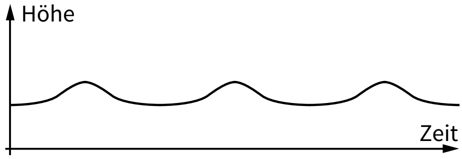
15

2. **a)** Fortsetzung

(**3**)



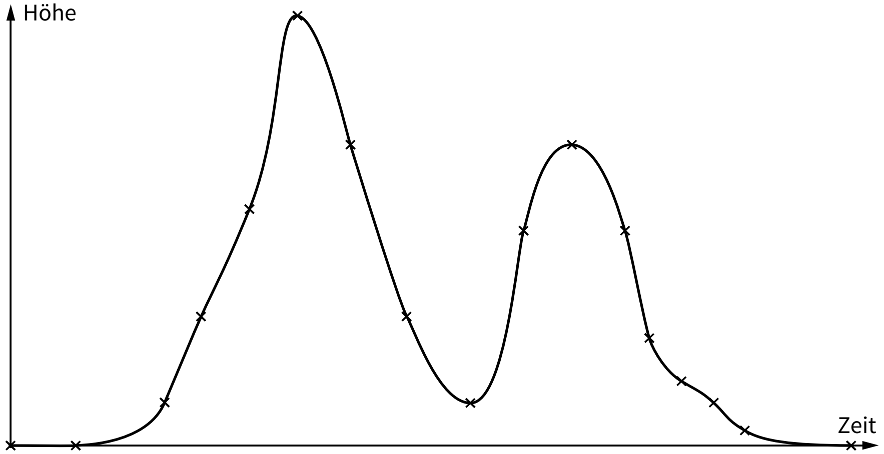
(**4**)



b) –

3. **a)** Die Höhe ändert sich im Verlauf der Zeit, also: *Zeit* → *Höhe*
Eine andere Möglichkeit wäre u. a.: *Zeit* → *Geschwindigkeit*

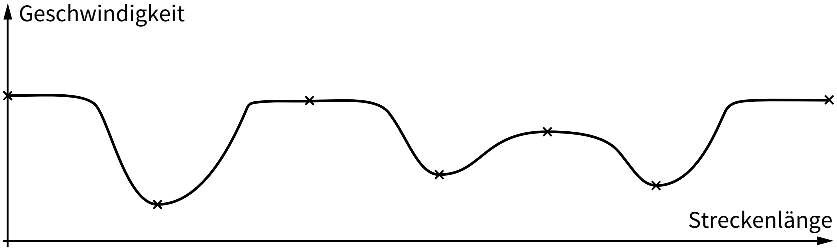
b)



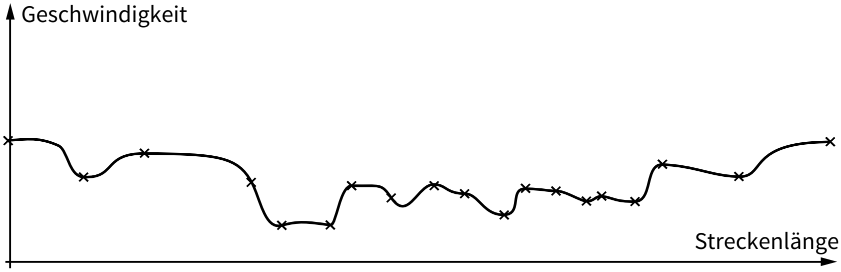
4. –

16

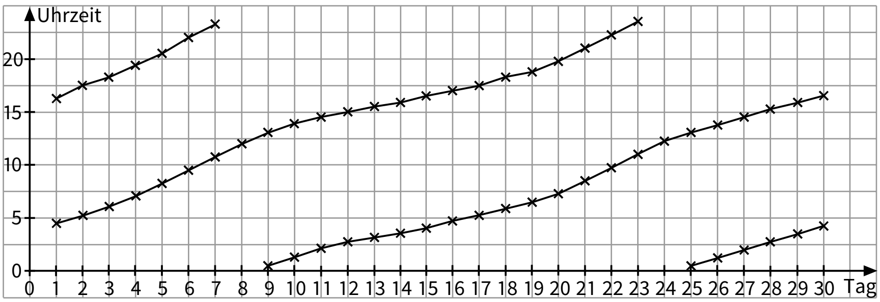
5. *Rundkurs A (Fahrtrichtung gegen den Uhrzeigersinn):*



Rundkurs B: Start: mittig auf der langen Geraden unten, Fahrtrichtung gegen den Uhrzeigersinn



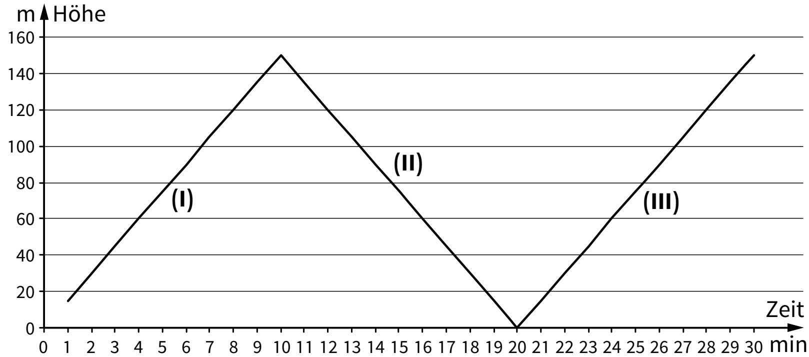
6. **a)**



b) Etwa um 02:42 Uhr und etwa um 15:02 Uhr

c) Vereinfachung: keine äußeren Einflüsse wie Wetterlage, Planetenkonstellationen, Mondphase und weiteres beachtet.

16

7. 

(I): $h = 15 \cdot t$ für $0 \le t \le 10$
(II): $h = -15 \cdot t + 300$ für $10 \le t \le 20$
(III): $h = 15 \cdot t - 300$ für $20 \le t \le 30$

8. –

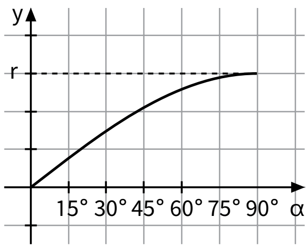
1.2 Sinus und Kosinus am Einheitskreis

17

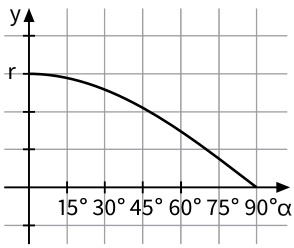
Einstieg:

a) Siehe Bild rechts.

b) $y = r \cdot \sin(\alpha)$; $0° \le \alpha \le 90°$



c) $y = r \cdot \cos(\alpha)$ für $0° \le x \le 90°$



20

2. **a)** 0,97 **b)** 0,41 **c)** −0,56 **d)** 0,26 **e)** −0,91 **f)** −0,83

3. **a)** 13,9°; 166,1°
214,1°; 325,9°

b) $20{,}5° \le \alpha \le 159{,}5°$
$206{,}7° \le \alpha \le 333{,}3°$

c) 41,4°; 318,6°
108,7°; 251,3°

d) $0° \le \alpha \le 49{,}5°$; $310{,}5° \le \alpha \le 360°$
$116{,}7° \le \alpha \le 243{,}3°$

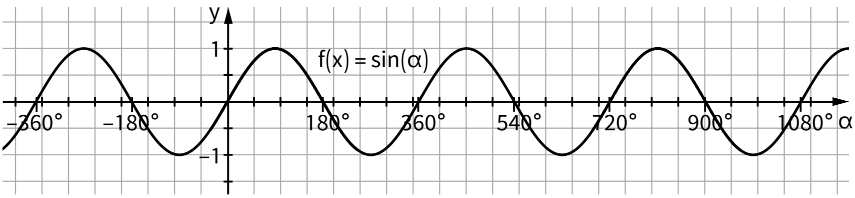
20

4. **a)** 0°; 180°; 360° **b)** 90° **c)** 270° **d)** 180° **e)** 0°; 360°

5. **a)** 0,8704; 0,3875; 0,8231
b) −0,2672; −0,8918; −0,9033

6. **a)** 72° **b)** 200° **c)** 253° **d)** 278° **e)** 222° **f)** 27°

7.



8. **a)** $0° < \alpha < 180°$ **b)** $90° < \alpha < 270°$ **c)** $0° < \alpha < 90°$ **d)** $90° < \alpha < 180°$

Das kann ich noch!

A) **1)** $L = \{(3\,|\,-1)\}$ **2)** $L = \{(-2\,|\,-3)\}$ **3)** $L = \{(x\,|\,y)\,|\,y = 4x + 2\}$

1.3 Sinus- und Kosinusfunktion mit ℝ als Definitionsmenge

1.3.1 Bogenmaß eines Winkels

21

Einstieg:
Längen sind leichter messbar als Winkel.
0,87 m auf einem Kreis mit Radius 1,25 m liefert $\alpha \approx 39{,}9°$.
28,50 m auf einem Kreis mit Radius 50 m liefert $\alpha \approx 32{,}7°$.
Der Wurfsektor ist also nicht richtig angelegt.

23

3. **a)** 0,646; 1,902; 6,074; 4,503; 0,305; 5,931; 2,218
b) −0,96; 7,959; −2,182; −9,041; −4,482

4. **a)** 152,98°; 294,5°; 28,65°; −186,21°; 1 352,18°; −74,48°; 1 168,83°
b) 270°; 45°; 225°; −315°; −67,5°; −112,5°; 157,5°; −30°

5.

a) 0,3	**b)** 0,0
194,8°	57,3°
154,7°	−57,3°
1,6	0,0
−5 328,5°	180°
0,0	0,1

6. –

1.3.2 Definition der Sinus- und Kosinusfunktion

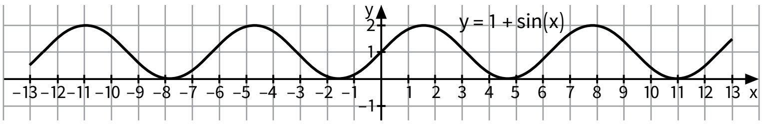
23 **Einstieg:**
Keine Lösungen

24 **2.** Der Taschenrechner ist noch auf DEGREE eingestellt und zeichnet die Sinusfunktion deshalb für Winkelmaße im Gradmaß. Entweder er ändert die Einstellungen unter Window, z. B. in $-360° \le x \le 360°$ oder er stellt das Winkelmaß auf Bogenmaß (RADIAN) um.

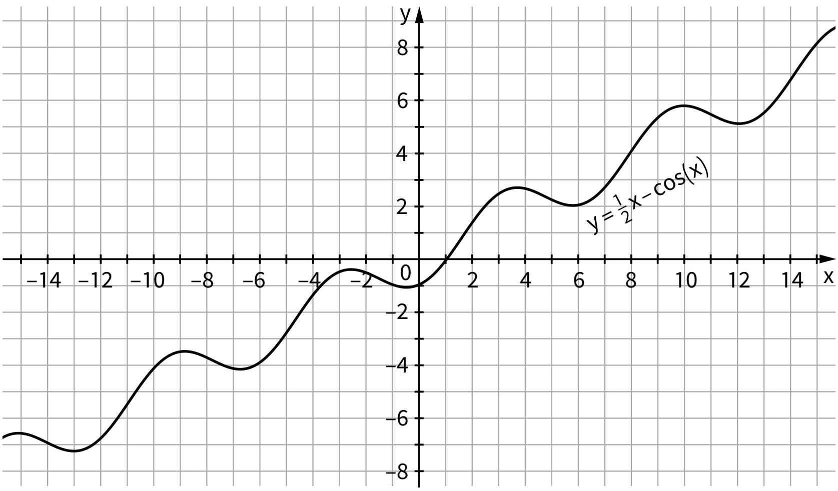
25 **3.** **(1)** $\sin(\pi) = 0$ **(3)** $\sin(15) = 0{,}65$ **(5)** $\sin(-1) = -0{,}84$
(2) $\sin(\pi°) = 0{,}055$ **(4)** $\sin(15°) = 0{,}26$ **(6)** $\sin(-1°) = -0{,}02$
Von links nach rechts: $\sin(-1)$, $\sin(-1°)$, $\sin(\pi°)$, $\sin(15°)$, $\sin(\pi)$, $\sin(15)$.

4. –

5. a)

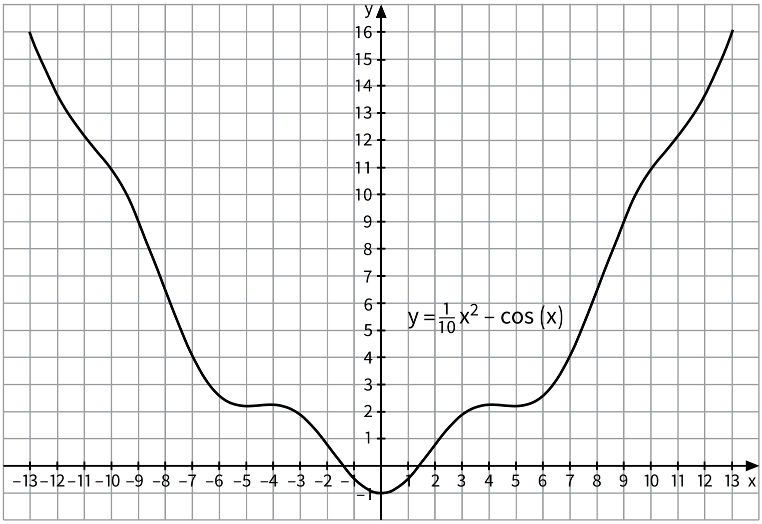


b)



25

5. **c)**



1.3.3 Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion

Einstieg:

a) Es gilt $\sin(1{,}241\ldots) = 0{,}9463\ldots = \sin(1{,}9)$.
Der Rechner gibt den kleinsten Wert an.

b) Zum Beispiel für $x = 4 - 2\pi \approx -2{,}283$ und $x = 4 + 2\pi \approx 10{,}283$ aufgrund der Periode und für $x \approx -0{,}858$ und $x \approx 5{,}425$, weil der Wert innerhalb einer Periode zweimal angenommen wird.

27

3. **a)** $0;\ \pi;\ 2\pi$
b) $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79;\ \frac{3}{4}\pi \approx 2{,}35$
c) $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}047;\ \frac{5}{3}\pi \approx 5{,}24$
d) π
e) $\sin(x)$ ist immer kleiner gleich 1.

4. –

5. **a)** $-0{,}22 + k \cdot 2\pi;\ 3{,}36 + k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
b) $0{,}8 + k \cdot 2\pi;\ 2{,}34 + k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
c) $1{,}69 + k \cdot 2\pi;\ -1{,}69 + k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

6. $k \in \mathbb{Z}$
a) $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$
b) $k \cdot \pi$
c) $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
d) $\pi + k \cdot 2\pi$
e) $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi;\ -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$
f) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi;\ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$
g) $\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi;\ -\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$
h) $-\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi;\ \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

27 **7. a)** Größtmögliche Funktionswerte bei $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
Kleinstmögliche Funktionswerte bei $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
b) Größtmögliche Funktionswerte bei $k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
Kleinstmögliche Funktionswerte bei $\pi + k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$

1.4 Strecken des Graphen der Sinusfunktion

28 **Einstieg:**

a) Die Graphen entstehen durch Strecken parallel zur y-Achse.
b) Die Funktionsvorschrift ist $a \cdot \sin(x)$. a ist die Auslenkung parallel zur y-Achse.
c) Die Funktionsvorschrift ist $a \cdot \sin(x) + d$. a ist die Auslenkung parallel zur y-Achse, d die Verschiebung parallel zur y-Achse.
d) Ja, siehe zum Beispiel Teilaufgabe c).

32 **3. (1)** $y = a \cdot \sin(x)$ mit $a < 0$: Spiegelung an der x-Achse, und Strecken mit Faktor $|a|$ parallel zur y-Achse.
(2) $y = \sin(b \cdot x)$ mit $b < 0$: Spiegelung an der y-Achse und Streckung parallel zur x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$.

4. Streckung der Funktionswerte um den Faktor a parallel zur y-Achse. Streckung parallel zur x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{b}$. Wenn $b > 1$ ist, liegt also eine Stauchung vor.
Funktionsgleichung: $y = a \cdot \sin(b\,x)$

5. a) $y = 1{,}5 \cdot \sin(x)$
b) $y = 1{,}8 \cdot \sin(x)$
c) $y = 0{,}75 \cdot \sin(x)$
d) $y = 0{,}5 \cdot \sin(x)$

6. –

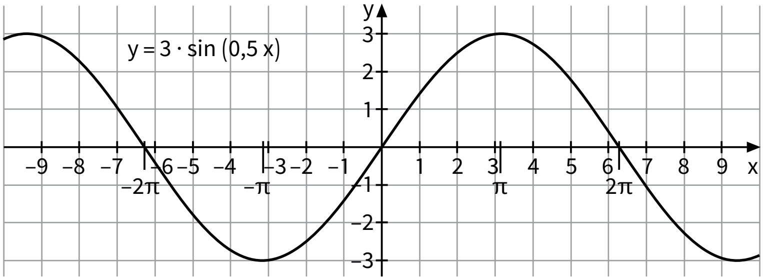
7. a) $y_1 \approx 1{,}77$ **b)** $x_2 \approx -0{,}52$

33 **8. a)** $a = 1{,}3$ **b)** $a = 6$

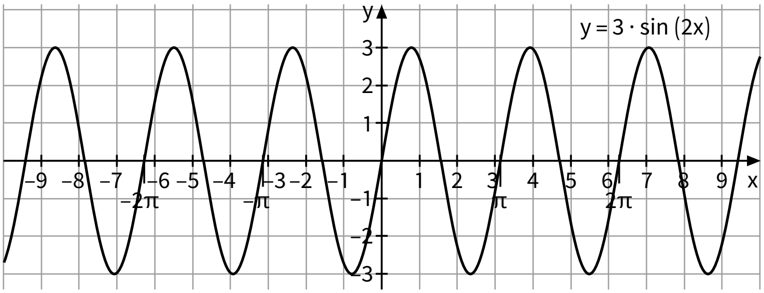
9. a) $y = 1{,}62 \cdot \sin(x)$
b) $y = 2{,}19 \cdot \sin(x)$
c) $y = 0{,}57 \cdot \sin(x)$
d) $y = 2{,}12 \cdot \sin(x)$

33

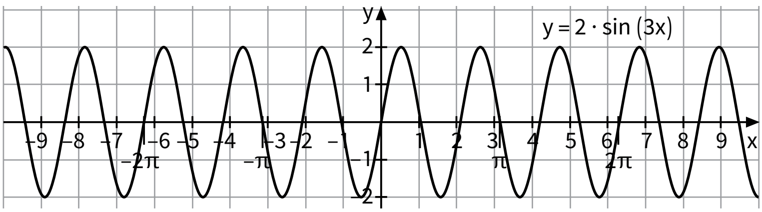
10. a) Nullstellen: $k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Periode: 4π
Wertebereich: $-3 \le y \le 3$ mit $y \in \mathbb{R}$



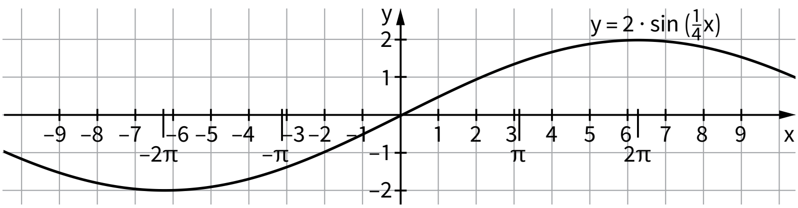
b) Nullstellen: $k \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Periode: π
Wertebereich: $-3 \le y \le 3$ mit $y \in \mathbb{R}$



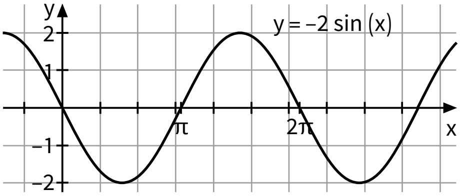
c) Nullstellen: $k \cdot \frac{\pi}{3}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Periode: $\frac{2\pi}{3}$
Wertebereich: $-2 \le y \le 2$ mit $y \in \mathbb{R}$



d) Nullstellen: $k \cdot 4\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Periode: 8π
Wertebereich: $-2 \le y \le 2$ mit $y \in \mathbb{R}$

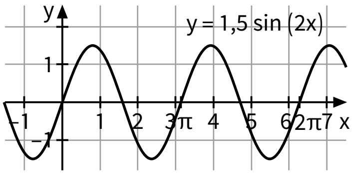


33 **11. a)** Richtiger Graph wäre:



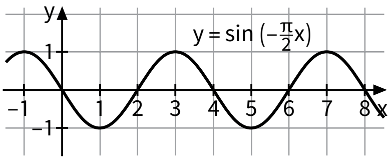
Richtige Gleichung zum Graphen im Buch wäre: $y = 2 \cdot \sin(x)$

b) Richtiger Graph wäre:



Richtige Gleichung zum Graphen im Buch wäre: $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

c) Richtiger Graph wäre:



Richtige Gleichung zum Graphen im Buch wäre: $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

12. a) $y = \sin(4x)$ **b)** $y = 2 \cdot \sin(2x)$ **c)** $y = \sin\left(\frac{3}{4}x\right)$ **d)** $y = 0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{4}{3}x\right)$

13. (1) $y_1 = 0{,}5$ **(2)** $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ sowie $x_2 = -\frac{5}{2}\pi$

Im Gegensatz zu (1) ist (2) nicht eindeutig lösbar.

14. a) $b = 4;\ b = -4$

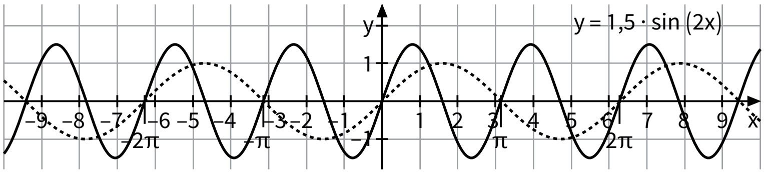
b) $b = 3 + 24 \cdot k;\ b = 9 + 24 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Es gilt $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin\left(\frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Daher ergeben sich die zwei Gleichungen $\frac{\pi}{4} + 2k\pi = b \cdot \frac{\pi}{12}$ und $\frac{9\pi}{4} + 2k\pi = b \cdot \frac{\pi}{12}$.

Deshalb ist $b = 3 + 24k$ und $b = 9 + 24k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

33 **15.** Streckung parallel zur x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.
Streckung parallel zur y-Achse mit dem Faktor 1,5.
Nullstellen: $k \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Periode: π
Wertemenge: $-1{,}5 \le y \le 1{,}5$ mit $y \in \mathbb{R}$



1.5 Verschieben des Graphen der Sinusfunktion

36 **1.** **(1)** Um 2 nach oben verschoben.
(2) Um 3 nach unten verschoben.
(3) Um π nach unten verschoben.
(4) Um π nach oben verschoben.

2. **a)** $\sin(x) + 1{,}5$ **b)** $\sin(x) - 1{,}75$

3. **(1)** Um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben.
(2) Um $\frac{\pi}{4}$ nach links verschoben.
(3) Um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben.
(4) Um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts verschoben.

4. **a)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\sin(x + 1)$ **d)** $\sin(x - 2)$

5. –

6. Den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \cos(x + c)$ erhält man durch Verschieben des Graphen der Kosinusfunktion mit $y = \cos(x)$ parallel zur x-Achse.
Wenn $c < 0$ wird nach rechts verschoben.
Wenn $c > 0$ wird nach links verschoben.

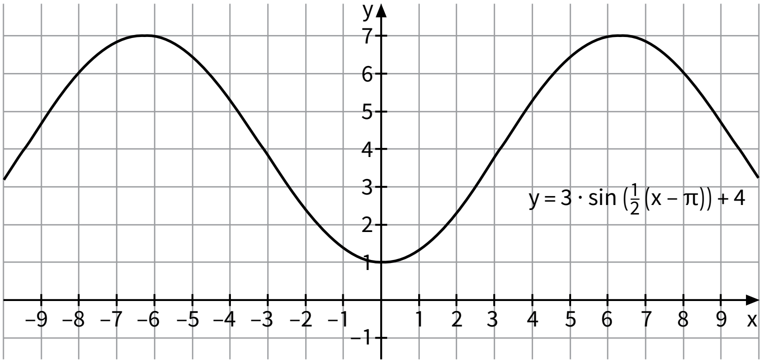
1.6 Allgemeine Sinusfunktion

37 **Einstieg:**
Siehe Merksatz auf Seite 38 des Schülerbandes.

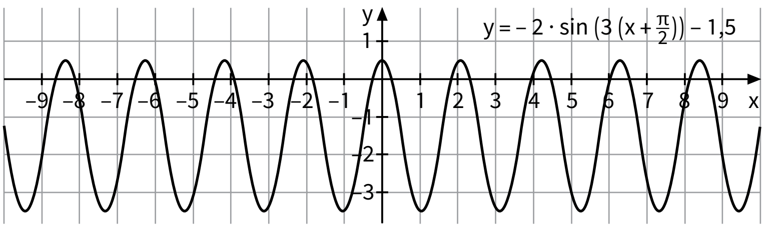
39 **3.** **a)** $-0{,}5\sin(2x) + 1$ **b)** $3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(x - 3)\right)$

40

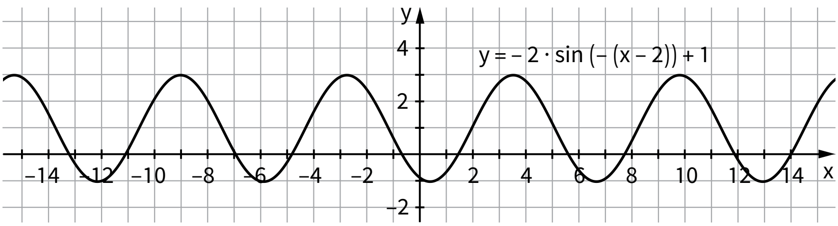
4. a) $3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right) + 4$



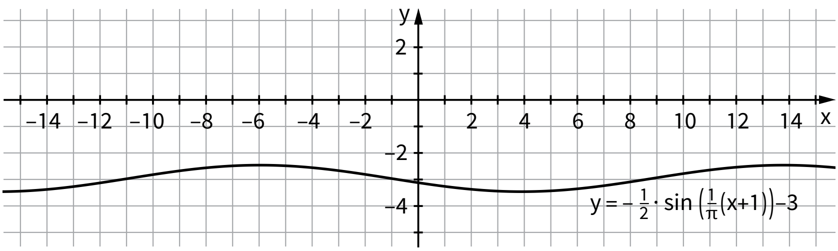
b) $-2 \cdot \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1{,}5$



c) $-2 \cdot \sin(-1\,(x - 2)) + 1$



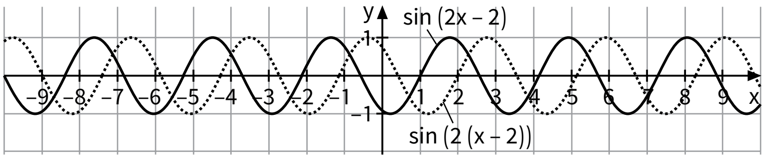
d) $-\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{\pi}(x + 1)\right) - 3$



40

5. **a)** Strecken mit dem Faktor 2 parallel zur y-Achse; Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ parallel zur x-Achse; Verschieben parallel zur x-Achse um $\frac{\pi}{4}$ nach links parallel zur x-Achse.
b) Strecken mit dem Faktor 3 parallel zur y-Achse; Strecken mit dem Faktor 2 parallel zur x-Achse; Verschieben parallel zur x-Achse um π nach rechts; Verschieben parallel zur y-Achse um 1 nach oben.
c) Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ parallel zur y-Achse; Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ parallel zur x-Achse, Verschieben parallel zur x-Achse um 1 nach rechts.
d) Strecken mit dem Faktor –2 parallel zur y-Achse; Strecken mit $\frac{2}{\pi}$ parallel zur x-Achse; Verschieben parallel zur x-Achse um 2 nach links; Verschieben parallel zur y-Achse um 2 nach unten.

6. $\sin(2x-2) \neq \sin(2x-4) = \sin(2(x-2))$



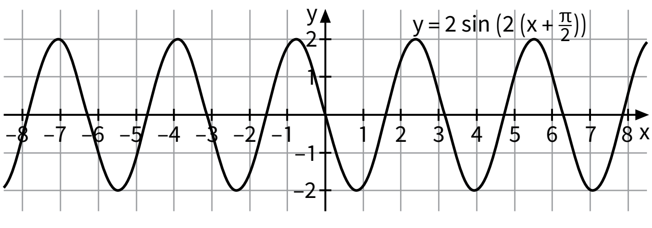
7. f: Verschieben parallel zur x-Achse um $\frac{\pi}{4}$ nach links, dann Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ parallel zur x-Achse.
g: Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ parallel zur x-Achse, dann Verschieben parallel zur x-Achse um $\frac{\pi}{8}$ nach links.

8. Beide Graphen sind falsch, denn für $x = 0$ gilt:

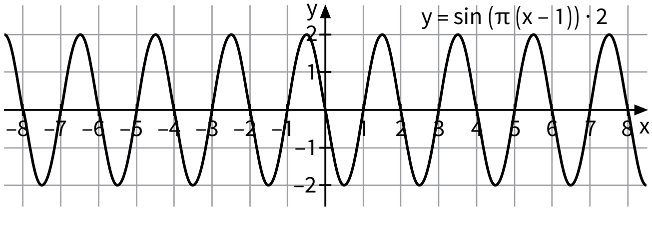
$2 \cdot \sin\left(2\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2 \cdot \sin(\pi) = 0 \neq 2$ und $\sin\left(\pi(0-1)\right) \cdot 2 = \sin(-\pi) \cdot 2 = 0 \neq 2$

Richtig wären:

a)



b)



9. –

41 **10. a)** z. B.: $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{5}x - \frac{9}{10}\pi\right) + 2$ **b)** z. B.: $y = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2}\right)$

11. a) $y = -2\sin(2x) + 1$ **c)** $y = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ **e)** $y = -\sin\left(\frac{\pi}{5}x - 2\pi\right) - 1$

b) $y = 0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{3}{8}x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **d)** $y = -\sin(\pi x)$ **f)** $y = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

12. a) **(1)** $y = 2 \cdot \sin(x)$ **(3)** $y = \sin(3x)$

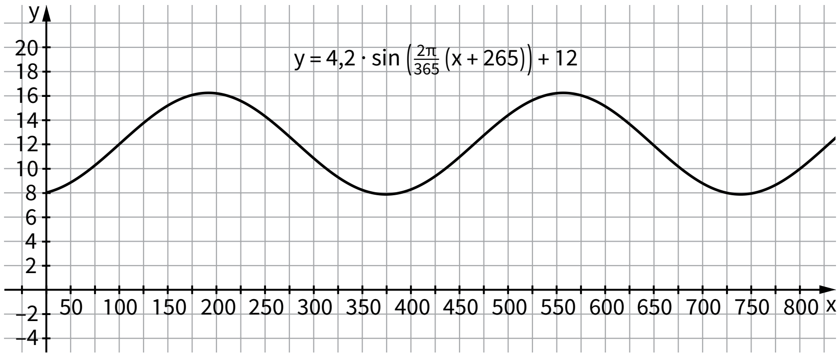
(2) $y = 1{,}5 \cdot \sin(2x)$ **(4)** $y = 1{,}5\sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$

b) Die Gondelbewegungen unterscheiden sich in der erreichten Maximalhöhe, in der Starthöhe und der Geschwindigkeit.

1.7 Modellieren mit allgemeinen Sinusfunktion

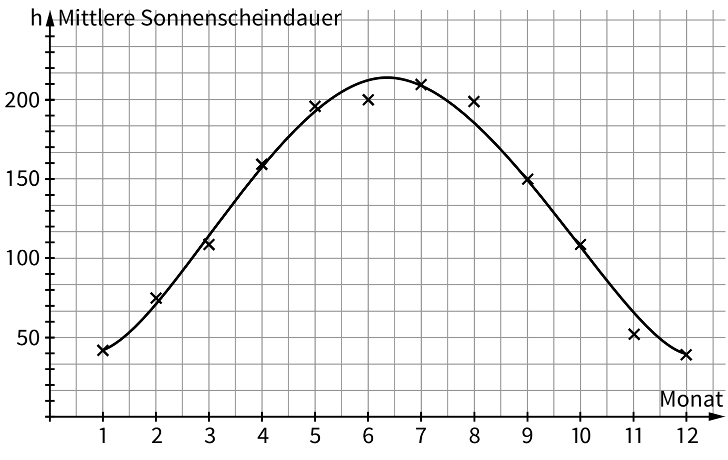
42 **Einstieg:**

a) $y = 4{,}2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x + 265)\right) + 12$



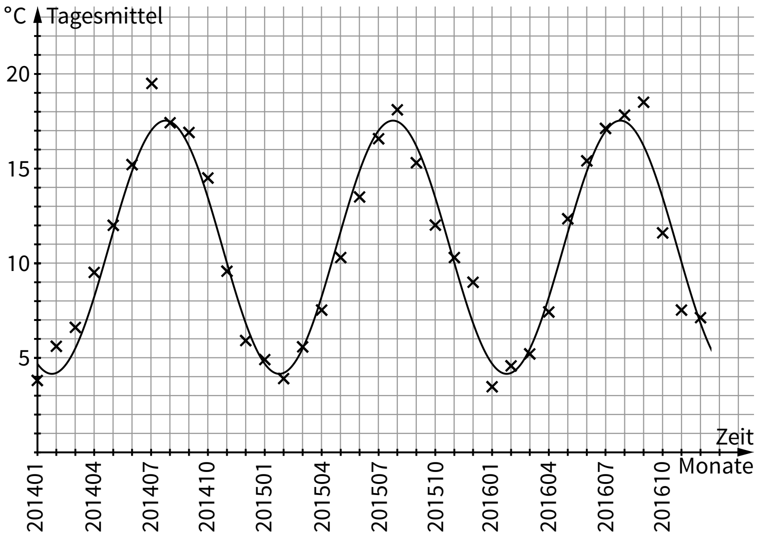
b) $x = 191$; Sonnenscheindauer etwa 16 h.

44 **2.** $f(x) \approx 96{,}653 \cdot \sin(0{,}467x - 1{,}401) + 117{,}468$



44

3. **a)** und **b)**



$f(x) \approx 6{,}81 \cdot \sin(0{,}52x + 2{,}47) + 10{,}92$

Das kann ich noch!

A) P: Preis (in €)
x: gefahrende Strecke (in km)

1) $P_{\text{Rent a Car}}(x) = 0{,}25 \cdot x + 45$

$P_{\text{Car4you}}(x) = 0{,}3 \cdot x + 37{,}50$

2) $P_{\text{Rent a Car}}(120) = 75$
$P_{\text{Car4you}}(120) = 73{,}50$, also ist Car4you günstiger.

3) Bei 150 km sind beide Angebote gleich günstig, nämlich 82,50 €.

45

4. Sie hat beim ersten Versuch die Periode 20 nicht eingegeben.

5. Athen: $y = 9 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12}(x-5)\right) + 19$

Moskau: $y = 14 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12}(x-5)\right) + 4$

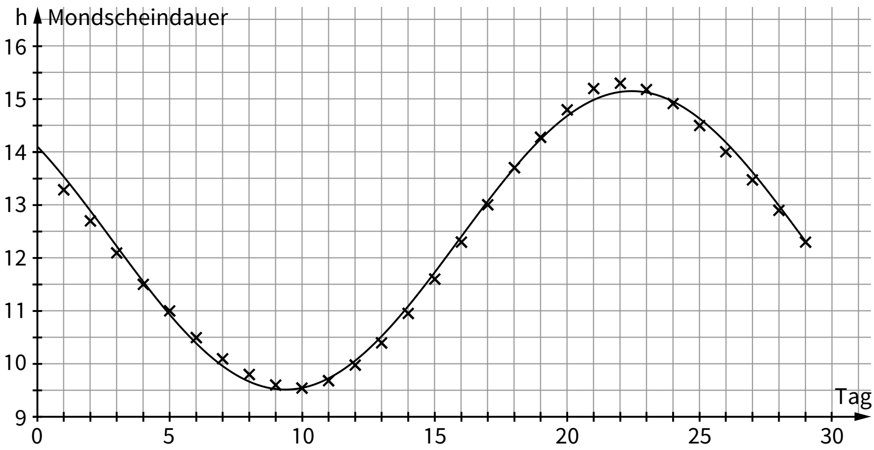
Jakutsk: $y = 32 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12}(x-4)\right) - 12$

6. $y = 4 \cdot \cos(\pi t)$ $\quad y = 4 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

45

7. Da die Umlaufzeit des Mondes mehr als einen Tag dauert, erhält man für den September nur 29 „Mondtage“. Die folgende Tabelle zeigt die Länge der Tage in Stunden und Minuten.

Tag	Dauer	Tag	Dauer	Tag	Dauer
1	13:16	11	9:40	21	15:10
2	12:40	12	9:57	22	15:17
3	12:06	13	10:24	23	15:13
4	11:31	14	10:57	24	14:55
5	11:01	15	11:35	25	14:31
6	10:31	16	12:18	26	14:02
7	10:06	17	13:00	27	13:28
8	9:47	18	13:42	28	12:53
9	9:36	19	14:19	29	12:18
10	9:33	20	14:49		



$f(x) = 2{,}82 \cdot \sin(0{,}24\,x + 2{,}47) + 12{,}31$

8. Für das Alter t in Tagen erhält man:

Körperlicher Rhythmus: $k(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{23} \cdot t\right)$

Emotionaler Rhythmus: $e(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{28} \cdot t\right)$

Intellektueller Rhythmus: $i(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{33} \cdot t\right)$

Auf den Punkt gebracht: Parametervariation – Abbilden von Funktionsgraphen

46

1. **a)** $(x-3)^2-1$

b) Verschieben um 3 nach rechts, Verschieben um 1 nach unten.

2. $y = a\,x^3 + b$

b Verschieben in Richtung der y-Achse mit dem Faktor b.

a Strecken mit dem Faktor a in Richtung der y-Achse.

3. **a)** Periode: 365

Maximum: 17; Minimum: 8

Um 90 nach rechts verschoben. $h(t) = 4{,}5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - 90\right) + 12{,}5$

b) Der Graph für Madrid hat eine geringere Spannweite zwischen 9,6 und 14,4 statt zwischen 8 und 16, ist also flacher. Der längste Tag ist schon der 80. Tag und nicht wie in Frankfurt der 90. Tag.

Anhand des Graphen kann man vermuten, dass Madrid näher am Äquator liegt.

1.8 Aufgaben zur Vertiefung

48

1. **a)** Symmetrieachsen bei $k \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Symmetriepunkte: –

kleinste Periodenlänge: π

b) Symmetrieachsen: –

Symmetriepunkte: –

kleinste Periodenlänge: –

c) Symmetrieachsen: –

Symmetriepunkte: $k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

kleinste Periodenlänge: π

d) Symmetrieachsen: –

Symmetriepunkte: –

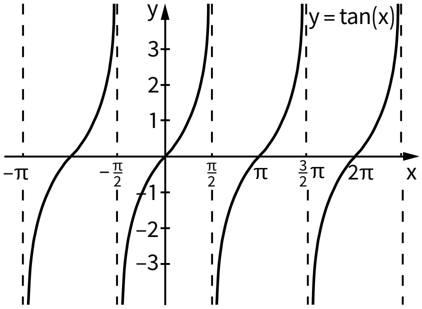
kleinste Periodenlänge: π

2. –

3. –

48

4. Definitionslücken bei: $k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bei den Nullstellen der Cosinusfunktion
Nullstellen bei: $k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ wie bei der Sinusfunktion
Symmetriepunkte bei: $k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Die einzelnen Graphen der Abschnitte, gegeben durch die Intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$, sind punktsymmetrisch zu dem Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle).



2. Algebraisches Lösen geometrischer Probleme

51 **Einstiegsseite:**

- ➜ Dreiecke sind durch die Seitenlängen eindeutig festgelegt (Kongruenzsätze).
- ➜ Trigonometrie kommt aus dem Griechischen: Dreieck bzw. Dreiecksberechnung.

Lernfeld: Alles über Dreiecke

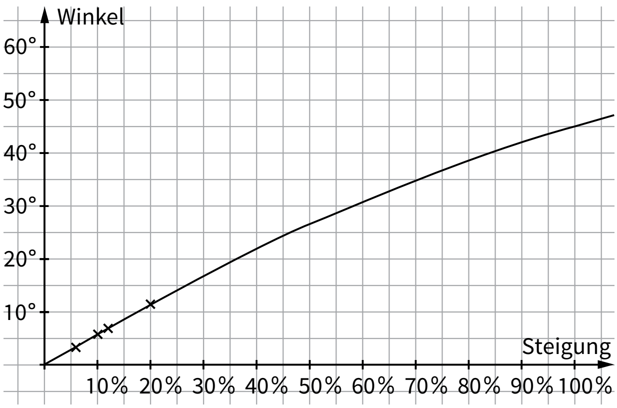
52 **1. Auftrag: Behindertengerechte Planung**

➜ Höhe der Stufen: je ca. 17 cm
Länge der Stufen: je ca. 30 cm
Steigung: $\frac{3 \cdot 17}{3 \cdot 30} = 56{,}67\,\%$
Steigungswinkel: $\alpha \approx 29{,}5°$

➜

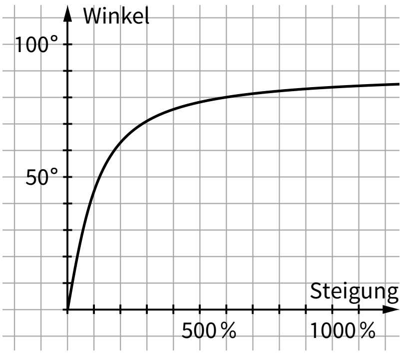
Steigung (in %)	Winkel (in Grad)
6	3,43
10	5,71
12	6,84
20	11,31

Der Steigungswinkel ist kleiner als 90°, denn:
Steigung 1 000 %: Steigungswinkel $\alpha \approx 84{,}3°$
Steigung 1 000 000 %: Steigungswinkel $\alpha \approx 89{,}99°$

➜ 

52

→ **1. Auftrag:** Fortsetzung



→ Keine Lösungen

2.1 Sinussatz

53

Einstieg:

a) $c = \frac{8\,\text{sm}}{\sin(180° - 41° - 57°)} \cdot \sin(41°) = 5{,}3\,\text{sm}$

Das Schiff hat einen Abstand von 5,3 sm zum Leuchtturm.

b) $b = \frac{5\,\text{sm}}{\sin(180° - (180° - 72°) - 47°)} \cdot \sin(180° - 72°) = 11{,}25\,\text{sm}$

Anfangs war der Abstand 11,25 sm.

57

3. Da das Dreieck rechtwinklig ist, gilt $\gamma = 90°$. Des Weiteren ist $\sin(90°) = 1$. Somit gilt der Sinussatz auch für rechtwinklige Dreiecke und er lässt sich vereinfacht darstellen:

$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(90°)} = \frac{\sin(\alpha)}{1} = \sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.

4. a) $\overline{FD} \approx 31{,}6\,\text{km}$; $\overline{FE} \approx 27{,}3\,\text{km}$
b) $a \approx 11{,}1\,\text{cm}$; $b \approx 6{,}1\,\text{cm}$

5. a) **(1)** 0,891 **(2)** 0,087 **(3)** 0,996 **(4)** 0,602 **(5)** 0,218 **(6)** 0,986

b) **(1)** 84,0° und 96,0° **(2)** 36,7° und 143,3° **(3)** 47,6° und 132,4° **(4)** 13,6° und 166,4°

6. a) $\gamma = 74°$; $b \approx 3{,}9\,\text{cm}$; $c \approx 7{,}3\,\text{cm}$
b) $\gamma = 67°$; $a \approx 7{,}2\,\text{cm}$; $b \approx 8{,}0\,\text{cm}$
c) $\gamma = 54°$; $a \approx 99{,}9\,\text{cm}$; $c \approx 84{,}5\,\text{cm}$
d) $\alpha = 118°$; $b \approx 19{,}6\,\text{m}$; $c \approx 44{,}1\,\text{m}$
e) $c \approx 46{,}5\,\text{m}$; $\beta = 60°$; $\gamma \approx 39°$
f) $a \approx 13{,}0\,\text{m}$; $\alpha \approx 78{,}5°$; $\beta \approx 64{,}5°$
g) $b \approx 2{,}8\,\text{m}$; $\alpha \approx 20{,}4°$; $\beta \approx 61{,}6°$
h) $c \approx 11{,}2\,\text{cm}$; $\alpha \approx 36{,}7°$; $\gamma \approx 20{,}3°$

57 **7.** Falsch umgestellt, richtig ist:

$\frac{7\,\text{cm}}{\sin(\varepsilon)} = \frac{5\,\text{cm}}{\sin(23°)}$, also $\sin(\varepsilon) = \frac{7\,\text{cm} \cdot \sin(23°)}{5\,\text{cm}} \approx 0{,}5470$

$\varepsilon \approx 33{,}2°$

2.2 Kosinussatz

58 **Einstieg:**

a) $\overline{EF} \approx 366{,}1\,\text{m}$ **b)** $\alpha \approx 76{,}8°$; $\beta \approx 46{,}2°$

61 **3.** $\alpha \approx 102{,}0°$; $\beta \approx 33{,}3°$; $\gamma \approx 44{,}7°$

4. $|AB| \approx 711{,}6\,\text{m}$

5. **a)** **(1)** $-0{,}454$ **(3)** $-0{,}087$ **(5)** $-0{,}976$
(2) $-0{,}996$ **(4)** $-0{,}799$ **(6)** $-0{,}165$
b) **(1)** 105,0° **(2)** 160° **(3)** 123,1° **(4)** 96,96°

62 **6.** **a)** $a \approx 11{,}4\,\text{m}$, $\beta \approx 70{,}9°$, $\gamma \approx 45{,}1°$
b) $c \approx 8{,}1\,\text{cm}$, $\alpha \approx 77{,}3°$, $\beta \approx 45{,}7°$
c) $b \approx 7{,}5\,\text{m}$, $\beta \approx 27{,}7°$, $\gamma \approx 44{,}3°$
d) $b \approx 12{,}5\,\text{cm}$, $\alpha \approx 20{,}6°$, $\gamma \approx 35{,}4°$

7 Die Aufgabe ist falsch gelöst. Richtig ist:

$a^2 = \left(3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(31°)\right)\text{cm}^2$, also $a \approx 2{,}1\,\text{cm}$

8. **a)** $\alpha \approx 46{,}4°$, $\beta \approx 76{,}5°$, $\gamma \approx 57{,}0°$
b) $\alpha \approx 41{,}4°$, $\beta \approx 55{,}8°$, $\gamma \approx 82{,}8°$
c) $\alpha \approx 31{,}4°$, $\beta \approx 24{,}4°$, $\gamma \approx 124{,}2°$
d) $\alpha \approx 122{,}7°$, $\beta \approx 34{,}3°$, $\gamma \approx 23{,}0°$
e) $\alpha \approx 57{,}5°$, $\beta \approx 47{,}5°$, $\gamma \approx 75{,}0°$

9. Im Dreieck ABC gilt:

$\alpha = 180° - \alpha' = 123{,}6°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 14{,}3°$

$\overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha)$

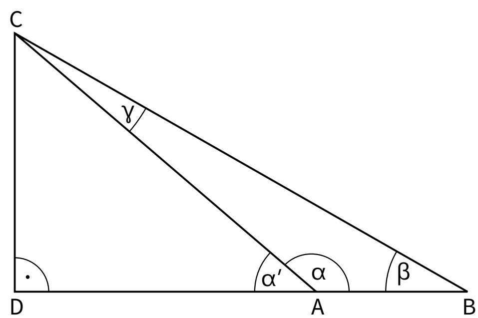
$\overline{CD} = \overline{CB} \cdot \sin(\beta)$

$\overline{CD} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$\approx \frac{50\,\text{m}}{\sin(14{,}3°)} \cdot \sin(123{,}6°) \cdot \sin(42{,}1°)$

$\approx 113{,}0\,\text{m}$

Der Fernsehturm ist ungefähr 113 m hoch.



62

10. Mit α, β und s erhält man:
$a \approx 1\,027{,}5$ m; $b \approx 1\,279{,}1$ m und weiter:
(1) über A mit γ, 90° und b: $h = 496{,}1$ m
(2) über B mit δ, 90° und a: $h = 494{,}5$ m
Die Höhe h beträgt ungefähr 495 m.

11. $\overline{BP} \approx 4{,}166$ km; $\overline{BQ} \approx 4{,}191$ km; Winkel bei B: $\beta_2 - \beta_1 = 62{,}1°$
$\overline{PQ} \approx 4{,}31$ km

2.3 Berechnen des Flächeninhalts eines Dreiecks mit trigonometrischen Mitteln

64

1. $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 41\text{ cm} \cdot 36\text{ cm} \cdot \sin(90°) = 738\text{ cm}^2$

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 41\text{ cm} \cdot 36\text{ cm} \cdot \sin(120°) = 639\text{ cm}^2$

2. **a)** $20{,}4\text{ cm}^2$ **c)** $43{,}7\text{ cm}^2$ **e)** $38{,}8\text{ cm}^2$ **g)** $6{,}5\text{ cm}^2$ **i)** $15{,}9\text{ cm}^2$
b) $4{,}6\text{ cm}^2$ **d)** $26{,}4\text{ cm}^2$ **f)** $40{,}9\text{ cm}^2$ **h)** $55{,}5\text{ cm}^2$ **j)** $12{,}6\text{ cm}^2$

3. **a)** $\gamma = 93°$; $a = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{7 \cdot \sin(35°)}{\sin(52°)} \approx 5{,}1$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) \approx 17{,}81\text{ cm}^2$

b) $\alpha = 87°$; $\frac{4}{\sin(28°)} = \frac{a}{\sin(87°)}$; $a \approx 8{,}51$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) \approx 15{,}42\text{ cm}^2$

c) $\beta = 96°$; $\frac{9}{\sin(51°)} = \frac{c}{\sin(33°)}$; $c \approx 6{,}31$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(96°) \approx 28{,}23\text{ cm}^2$

d) $\beta = 109°$; $\frac{6}{\sin(24°)} = \frac{a}{\sin(47°)}$; $a \approx 10{,}79$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) \approx 30{,}61\text{ cm}^2$

e) $\beta = 110°$; $\frac{5}{\sin(110°)} = \frac{a}{\sin(28°)}$; $a \approx 2{,}49$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) \approx 4{,}18\text{ cm}^2$

4. **a)** $4{,}8^2 \approx 5{,}3^2 + 3{,}1^2 - 2 \cdot 5{,}3 \cdot 3{,}1 \cdot \cos(\gamma)$
$\cos(\gamma) = 0{,}446$
$\gamma \approx 63{,}6°$
$A = \frac{1}{2} \cdot 5{,}3\text{ cm} \cdot 3{,}1\text{ cm} \cdot \sin(63{,}5°) \approx 7{,}35\text{ cm}^2$

b) $6{,}5^2 = 7{,}1^2 + 5{,}3^2 - 2 \cdot 7{,}1 \cdot 5{,}3 \cdot \cos(\gamma)$
$\cos(\gamma) = 0{,}482$
$\gamma \approx 61{,}21°$
$A = \frac{1}{2} \cdot 7{,}1\text{ cm} \cdot 5{,}3\text{ cm} \cdot \sin(\gamma) \approx 16{,}49\text{ cm}^2$

64

5. Wie teuer ist die Umzäunung?
$\overline{AC}^2 = 942^2 + 794^2 - 2 \cdot 942 \cdot 794 \cdot \cos(39°)$
$\overline{AC} \approx 596\,\text{m}$
$l \approx 596\,\text{m} + 942\,\text{m} + 794\,\text{m} = 2\,332\,\text{m}$
Die Kosten für die Umzäunung betragen ungefähr 58 300 €.
Wie teuer wird die Aufforstung?
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot 794\,\text{m} \cdot 942\,\text{m} \cdot \sin(39°) \approx 235\,349\,\text{m}^2 \approx 23{,}535\,\text{ha}$
Die Kosten für die Aufforstung betragen ungefähr 160 000 €.

6. a) –
b) $840^2 = 760^2 + 827^2 - 2 \cdot 760 \cdot 827 \cdot \cos(\gamma)$
$\cos(\gamma) = 0{,}44$
$\gamma \approx 63{,}75°$
$A = \frac{1}{2} \cdot 760\,\text{m} \cdot 827\,\text{m} \cdot \sin(\gamma) \approx 281\,856{,}85\,\text{m}^2 \approx 28{,}186\,\text{ha}$
Grünanlage 40 %: $A \approx 11{,}3\,\text{ha}$
Baufläche 60 %: $A \approx 16{,}9\,\text{ha}$
Für die Bebauung stehen ungefähr 16,9 ha zur Verfügung.

2.4 Berechnungen an Pyramiden und Kegeln

65

Einstieg:
$\gamma = 32°$; Mit dem Sinussatz erhält man $a \approx 3{,}6\,\text{cm}$ und $b \approx 3{,}7\,\text{cm}$.

66

2. Der Winkel an der Spitze der Pyramide beträgt 64°. Mit dem Sinussatz erhält man $h = \frac{\sin(26°)}{\sin(64°)} \cdot (127\,\text{m} + 51{,}5\,\text{m}) \approx 87{,}1\,\text{m}$.

3. a) $d^2 = s^2 + s^2 - 2 \cdot s \cdot s \cdot \cos(\gamma)$
$22{,}8^2 = 32{,}1^2 + 32{,}1^2 - 2 \cdot 32{,}1^2 \cdot \cos(\gamma)$
$\cos(\gamma) = 0{,}7477$
$\gamma \approx 41{,}6°$
$\alpha \approx 69{,}2°$
$A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot (32{,}1\,\text{cm})^2 \cdot \sin(41{,}6°) \approx 342\,\text{cm}^2$
Oberflächeninhalt des Kegels:
$A_O = \pi \cdot r(r+s) = \pi \cdot 11{,}4\,\text{cm} \cdot (11{,}4\,\text{cm} + 32{,}1\,\text{cm}) \approx 1\,557{,}92\,\text{cm}^2$
Volumen des Kegels:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ mit $\sin(a) = \frac{h}{s}$, also $h = s \cdot \sin(\alpha) \approx 30{,}01\,\text{cm}$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (11{,}4\,\text{cm})^2 \cdot 30\,\text{cm} \approx 4\,082{,}81\,\text{cm}^3$

66

3. b) Seitenhöhe: $h_a = \sqrt{(12{,}4\,\text{cm})^2 - (4{,}35\,\text{cm})^2} \approx 11{,}61\,\text{cm}$

(1) *Längsschnitt:* $a^2 = h_a^2 + h_a^2 - 2 \cdot {h_a}^2 \cdot \cos(\gamma)$

$\cos(\gamma) = 0{,}719$

$\gamma \approx 44°$

$\alpha \approx 68°$

$A = \frac{1}{2} \cdot {h_a}^2 \cdot \sin(\gamma) \approx 46{,}74\,\text{cm}^2$

(2) *Diagonalschnitt:* $b^2 = s^2 + s^2 - 2 \cdot s^2 \cdot \cos(\gamma)$

mit $b = \sqrt{2\,a^2}$

$\cos(\gamma) = 0{,}508$

$\gamma \approx 0{,}508$

$\alpha \approx 60{,}3°$

$A = \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \sin(\gamma) \approx 66{,}22\,\text{cm}^2$

Oberflächeninhalt der Pyramide:

$O_A = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a \approx 277{,}53\,\text{cm}^2$

Volumen der Pyramide:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (8{,}7\,\text{cm})^2 \cdot 10{,}8\,\text{cm} \approx 272{,}5\,\text{cm}^3$

66

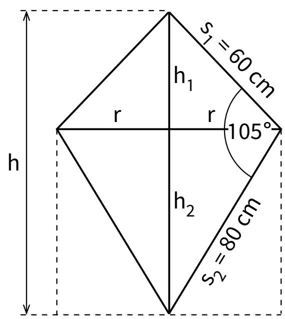
4. Mit dem Sinussatz erhält man: $h = \frac{\sin(30°)}{\sin(90°)} \cdot 12\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$, sowie:

$d = \frac{\sin(25°)}{\sin(125°)} \cdot 12\,\text{cm} \approx 6{,}19\,\text{cm}$.

Somit ist $r \approx 3{,}1\,\text{cm}$ und für das Volumen gilt:

$V = \frac{\pi \cdot (3{,}1\,\text{cm})^2 \cdot 6\,\text{cm}}{3} \approx 187{,}2\,\text{cm}^3$.

5. Berechnung der Gesamthöhe h des Doppelkegels:



$h = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cos(105°)} \approx 111{,}7\,\text{cm}$

Der Radius r ist Höhe im Dreieck mit den Seitenlängen h, s_1 und s_2. Das Dreieck hat den Flächeninhalt:

$A = \frac{1}{2} \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \sin(105°) \approx 2\,318{,}22\,\text{cm}^2$

Aus $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot r$ folgt $r \approx \frac{2 \cdot A}{h} \approx 41{,}5\,\text{cm}$

Mit h und dem Satz des Pythagoras erhält man

$h_1 \approx 43{,}3\,\text{cm}$ und $h_2 \approx 68{,}4\,\text{cm}$.

Die Boje ragt $\frac{1}{3}h = \frac{111{,}7}{3}\text{cm} \approx 37{,}2\,\text{cm}$ aus dem Wasser. Von der oberen Boje ist also der untere Teil mit einer Höhe von 6,1 cm noch im Wasser.

Mit den Strahlensätzen kann man den Radius r_W und die Mantellinie s_W des aus dem aus dem Wasser ragenden Kegel berechnen:

$\frac{37{,}2\,\text{cm}}{43{,}3\,\text{cm}} = \frac{s_W}{60\,\text{cm}}$, also $s_W \approx 51{,}55\,\text{cm}$ $\qquad$ $\frac{37{,}2\,\text{cm}}{43{,}3\,\text{cm}} = \frac{r_W}{41{,}5\,\text{cm}}$, also $r_W \approx 33{,}65\,\text{cm}$

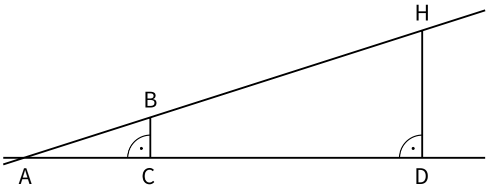
Für den Oberflächeninhalt des im Wasser befindlichen Teils der Boje folgt:

$A_O = \pi \cdot r \cdot s_1 - \pi \cdot r_W \cdot s_W + \pi \cdot r \cdot s_2 \approx 12\,803{,}07\,\text{cm}^2 \approx 12\,800\,\text{cm}^2 = 128\,\text{dm}^2 = 1{,}28\,\text{m}^2$

Ungefähr $1{,}28\,\text{m}^2$ befinden sich im Wasser.

Im Blickpunkt: Wie hoch ist eigentlich … euer Schulgebäude

67 **1.** Der beweglich eingesetzte Zollstock wird so in Position gebracht, dass A, B und H auf einer Geraden liegen. Beim Anpeilen muss darauf geachtet werden, dass das Försterdreieck waagerecht gehalten wird (mittels Lot).
Anschließend kann der am Zollstock abgelesene Wert $\overline{BC}$ mittels zueinandern ähnlicher Dreiecke umgerechnet werden, um die gesuchte Höhe $\overline{HD}$ zu erhalten.
Für die Berechnung muss auch $\overline{AD}$ gemessen werden (Maßband). $\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

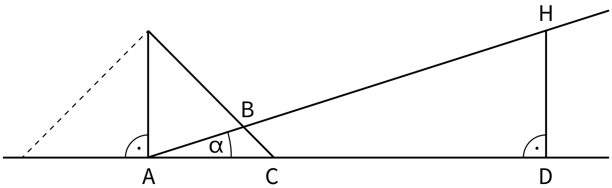


$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

2. Berechnung wie in Aufgabe 1 erläutert.

3. Berechnung wie in Aufgabe 1 erläutert.

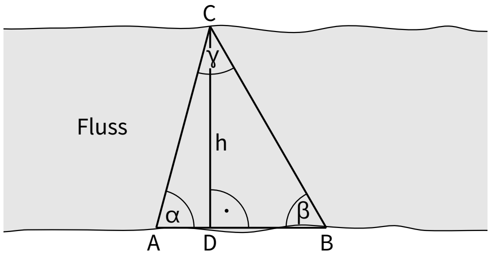
68 **4.** Der Zeiger $\overline{AB}$ wird mit $\overline{AH}$ in Übereinstimmung gebracht (angepeilt).
Mit dem Winkel α bei A und der Strecke $\overline{AD}$ lässt sich jetzt die Strecke $\overline{HD}$ berechnen.
$\tan(\alpha) = \frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}$



$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}$$

5. Berechnung der Höhe wie in Aufgabe 4 erläutert.

6. Mit den beiden gemessenen Winkeln α und β kann man den Winkel γ berechnen:
$\gamma = 180° - \alpha - \beta$
Mit dem Sinussatz erhält man:
$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha)$
Die Flussbreite h erhält man dann im rechtwinkligen Dreieck BCD:
$h = \sin(\beta) \cdot \overline{BC}$



2.5 Vermischte Übungen

69

1. **a)** $\beta = 36°$
$a \approx 9{,}0\,\text{cm}$
$b \approx 5{,}8\,\text{cm}$
$A \approx 12{,}7\,\text{cm}^2$

b) $c \approx 4{,}8\,\text{cm}$
$\alpha \approx 33{,}0°$
$\beta \approx 45{,}0°$
$A \approx 4{,}6\,\text{cm}^2$

c) $\beta = 48°$
$a \approx 2{,}2\,\text{cm}$
$c \approx 3{,}9\,\text{cm}$
$A \approx 3{,}2\,\text{cm}^2$

d) $a \approx 5{,}5\,\text{cm}$
$\beta \approx 99{,}0°$
$\gamma \approx 44{,}0°$
$A \approx 17{,}5\,\text{cm}^2$

e) $\gamma = 99{,}9°$
$b \approx 5{,}4\,\text{cm}$
$c \approx 14{,}0\,\text{cm}$
$A \approx 31{,}8\,\text{cm}^2$

f) $\alpha \approx 81{,}2°$
$\beta \approx 35{,}3°$
$\gamma \approx 63{,}5°$
$A \approx 7{,}4\,\text{cm}^2$

g) $a \approx 6{,}9\,\text{cm}$
$\alpha \approx 49{,}1°$
$\gamma \approx 19{,}9°$
$A \approx 10{,}0\,\text{cm}^2$

h) $\gamma = 67°$
$a \approx 7{,}2\,\text{cm}$
$b \approx 8{,}0\,\text{cm}$
$A \approx 26{,}4\,\text{cm}^2$

i) $b \approx 2{,}5\,\text{cm}$
$\alpha \approx 58{,}9°$
$\beta \approx 26{,}1°$
$A \approx 6{,}1\,\text{cm}^2$

j) $a \approx 7{,}2\,\text{cm}$
$\alpha \approx 91{,}8°$
$\gamma \approx 45{,}2°$
$A \approx 12{,}5\,\text{cm}^2$

2. **a)** $\alpha \approx 52{,}6°$
$\beta \approx 52{,}6°$
$\gamma \approx 74{,}8°$
$b = 14\,\text{cm}$

b) $c \approx 267{,}3\,\text{mm}$
$\alpha \approx 27{,}0°$
$\beta \approx 27{,}0°$
$a = 150\,\text{mm}$

c) $c \approx 10{,}8\,\text{m}$
$\beta = 77°$
$\gamma = 26°$
$a = 24\,\text{m}$

d) $b = 59{,}64\,\text{m}$
$c \approx 54{,}7\,\text{m}$
$\alpha \approx 62{,}7°$
$\beta \approx 62{,}7°$

e) $b = 109{,}4\,\text{cm}$
$c \approx 208{,}9\,\text{cm}$
$\beta \approx 17{,}3°$
$\gamma \approx 145{,}4°$

3. **a)** $\alpha = 68°;\ \beta = 49°;\ \gamma = 63°$
$\overline{AB} = 140\,\text{m}$

$$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = 145{,}7\,\text{m}$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = 118{,}6\,\text{m}$$

b) Höhe $= \overline{AC} \cdot \sin(68°) = 109{,}9\,\text{m}$
Die Brücke muss mindestens 109,9 m lang sein.

4. **a)** $b = d = 3{,}1\,\text{cm};\ \alpha = \beta = 64{,}5°;\ \gamma = \delta = 180° - \beta = 115{,}5°;\ c \approx 2{,}7\,\text{cm};$
$e = f \approx 4{,}9\,\text{cm}$

b) $b = d = 2{,}8\,\text{m};\ \gamma = \delta = 125{,}7°;\ \alpha = \beta = 180° - \gamma = 54{,}3°;\ a \approx 6{,}8\,\text{m};\ e \approx 5{,}6\,\text{m}$

69

4. c) Es ist $\delta = 180° - \beta = 111{,}2°$.
Mit dem Kosinussatz folgt für die Dreiecke ABC und ACD (Längen in km):
$e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta) = 6{,}1^2 + b^2 - 2 \cdot 6{,}1 \cdot b \cdot \cos(68{,}8°)$
$f^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos(\delta) = 2{,}9^2 + d^2 - 2 \cdot 2{,}9 \cdot d \cdot \cos(111{,}2°)$
Wegen $e = f$ und $b = d$ kann man die 2. Gleichung umformen:
$e^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\delta) = 2{,}9^2 + b^2 - 2 \cdot 2{,}9 \cdot b \cdot \cos(111{,}2°)$
Durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen mit e^2 erhält man die Gleichung:
$6{,}1^2 + b^2 - 2 \cdot 6{,}1 \cdot b \cdot \cos(68{,}8°) = 2{,}9^2 + b^2 - 2 \cdot 2{,}9 \cdot b \cdot \cos(111{,}2°)$
Durch Umformen der Gleichung erhält man:
$$b = \frac{6{,}1^2 - 2{,}9^2}{2 \cdot 6{,}1 \cdot \cos(68{,}8°) - 2 \cdot 2{,}9 \cdot \cos(111{,}2°)} \approx 4{,}4$$
$b = d \approx 4{,}4\,\text{km}$; $\alpha = \beta = 68{,}8°$; $\gamma = \delta = 180° - \beta = 111{,}2°$; $e = f \approx 6{,}1\,\text{km}$

d) $b = d = 2{,}4\,\text{cm}$; $e = f = 5{,}6\,\text{cm}$; $a \approx 5{,}3\,\text{cm}$; $\alpha = \beta \approx 83{,}6°$;
$\gamma = \delta = 180° - \alpha \approx 96{,}4$

5. a) Länge der Leiter l:
$l^2 = (l - 20\,\text{cm})^2 + (120\,\text{cm})^2$ (Satz des Pythagoras)
$l = 370\,\text{cm}$

b) $\overline{TB}^2 = (1\,200\,\text{m})^2 + (1\,300\,\text{m} - 800\,\text{m})^2$ (Satz des Pythagoras)
$\overline{TB} = 1\,300\,\text{m}$

70

6. Sei h_s die Höhe der Seitenfläche. Dann gilt:
$$\frac{h_s}{2 \cdot \sin(90° - \alpha)} = \frac{h_s}{\sin(90°)} \quad |:h_s$$
$$\frac{1}{2 \cdot \sin(90° - \alpha)} = 1 \quad |\sin(90° - \alpha)$$
$\sin(90° - \alpha) = 0{,}5$
$\alpha = 60°$

7. Es gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$ und $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$
Durch Gleichsetzen erhält man:
$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$
$a \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\alpha)$
Daraus folgt: $\frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$.
Entsprechend kann man die anderen beiden Formeln herleiten.

8. a) $\overline{AB} = 14{,}6\,\text{sm} \cdot 1852\,\text{m} = 27\,039{,}2\,\text{m} \approx 27\,\text{km}$

b) $\gamma = 72{,}3°$; $\overline{AC} = \frac{14{,}6\,\text{sm} \cdot \sin(61{,}4°)}{\sin(72{,}3°)} \approx 13{,}46\,\text{sm} \approx 24{,}9\,\text{km}$

c) $\sin(\alpha) = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$ $\qquad \overline{AC} \cdot \sin(\alpha) \approx 9{,}73\,\text{sm} \approx 18\,\text{km}$

70

9. Flächendiagonale e: $e^2 = (3\,cm)^2 + (3\,cm)^2$, also $e \approx 4{,}24\,cm$
Raumdiagonale f: $f^2 \approx (3\,cm)^2 + (4{,}24\,cm)^2$, also $f \approx 5{,}19\,cm$

$\sin(\alpha) \approx \frac{3\,cm}{5{,}19\,cm} \approx 0{,}578$, also $\alpha \approx 35{,}3°$

10. a) **(1)** $A = \frac{1}{2} \cdot (6{,}7\,cm)^2 \cdot \sin(43°) = 15{,}31\,cm^2$

(2) $\gamma = 72°$; $A = \frac{1}{2} \cdot (5{,}3\,cm)^2 \cdot \sin(72°) = 13{,}56\,cm^2$

b) **(1)** $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\alpha)$ **(2)** $A = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot c \cdot \sin(60°)$

11. $\beta - \alpha = 35{,}2°$

$\overline{AB}^2 = (391\,m)^2 + (648\,m)^2 - 2 \cdot 391\,m \cdot 648\,m \cdot \cos(35{,}2°)$

$\overline{AB}^2 \approx 158\,708{,}26\,m^2$

$\overline{AB} \approx 398{,}38\,m$

Der Eisberg ist ungefähr 400 m breit.

12. $(13{,}4\,m)^2 = 8{,}5\,m^2 + (8{,}5\,m)^2 - 2 \cdot (8{,}5\,m)^2 \cdot \cos(\gamma)$

$\cos(\gamma) = -0{,}24$

$\gamma \approx 104°$

$\alpha = \beta \approx 38°$

$A = \frac{1}{2} \cdot (8{,}5\,m)^2 \cdot \sin(104°) \approx 35{,}05\,m^2$

Der Neigungswinkel beträgt ungefähr 38° und die Größe der Dachfläche ungefähr 35 m².

71

13. Höhe im Dreieck ABC: $h_c = \sqrt{(7\,cm)^2 - (3{,}5\,cm)^2} \approx 6{,}06\,cm$

Höhe im Dreieck ABF: $h_f \approx \sqrt{(11\,cm)^2 + (6{,}06\,cm)^2} \approx 12{,}56\,cm$

Flächeninhalt der Schnittfläche ABF: $A \approx 43{,}96\,cm^2$
Oberflächeninhalt des Prismas: $A_O \approx 273{,}42\,cm^2$
Volumen des Prismas: $V \approx 233{,}31\,cm^3$

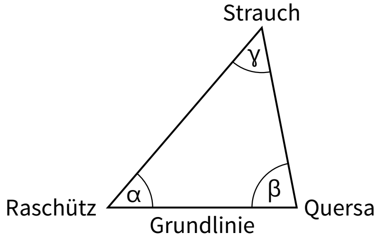
14. a) $\alpha \approx 54{,}74°$ **b)** $\beta \approx 70{,}52°$ **c)** $A = 2 \cdot a^2 \cdot \sin(60°)$

15. $\overline{AB} \approx 32{,}03\,m$; $\overline{AD} \approx 30{,}86\,m$; $\overline{DC} \approx 45{,}45\,m$; $\overline{BC} \approx 51{,}80\,m$

16. a) $\alpha = 74{,}3325°$, $\beta = 73{,}4208°$, $\gamma = 14{,}2061°$

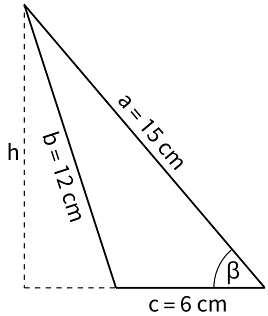
b) $\alpha = 49{,}4217°$, $\beta = 78{,}9894°$, $\gamma = 51{,}5889°$

Mit dem Sinussatz ergibt sich:
Raschütz – Strauch: 11 159,974 m
Quersa – Strauch: 8 635,155 m



71

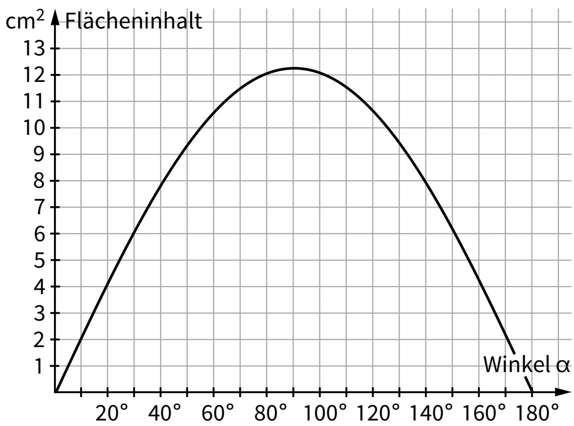
17. Skizze des Querschnitts siehe rechts.
Mit dem Kosinussatz erhalten wir $\beta \approx 49{,}46°$.
Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC folgt:
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) \approx 34{,}2\,m^2$
Damit können wir nun die Höhe des Dreiecks ABC berechnen:
$A = \frac{1}{2} c \cdot h$, also $h = \frac{2 \cdot A}{c} \approx \frac{2 \cdot 34{,}2\,cm^2}{6\,cm} = 11{,}4\,cm$
Volumen des Kegels $V_{Kegel} \approx 107{,}44\,cm^3$
Masse des Kegels: $m \approx 75{,}21\,g$



2.6 Aufgaben zur Vertiefung

72

1. **a)** Es gilt $\frac{h}{\alpha} = \sin(\alpha)$. Folglich gilt: $A = a^2 \cdot \sin(\alpha)$
b) $A(\alpha) = (3{,}5\,cm)^2 \cdot \sin(\alpha)$
α kann zwischen 0° und 180° liegen.



2. **(1)** $u = 58{,}8\,cm$, $A = 237{,}8\,cm^2$ **(2)** $u = 61{,}6\,cm$, $A = 289{,}3\,cm^2$ **(3)** $u = 62{,}1\,cm$, $A = 300\,cm^2$ **(4)** $u = 62{,}8$, $A = 313{,}7\,cm^2$

3. **a)** **(1)** 14,9° **(2)** 23,4° **(3)** 35,1° **(4)** 43,9°
b) **(1)** 13,2° **(2)** 20,7° **(3)** 30,7° **(4)** 38,0°
c) $n = 0{,}75$ [$n = 0{,}667$]
d) $\alpha = 48{,}6°$ [$\alpha = 41{,}8°$]

72

4. **a)** $\tan(0°) = 0 = \frac{\sin(0°)}{\cos(0°)}$

tan (90°) ist nicht definiert, da $\cos(90°) = 0$ und dividieren durch 0 nicht erlaubt ist.

b)

α	tan (α)
100°	−5,67
110°	−2,75
120°	−1,73
170°	−0,18

5. **a)** $\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

b) Das Minuszeichen steht dafür, dass der Graph fällt.

(1) 63,4° **(2)** −71,6° **(3)** −38,7° **(4)** 26,6°

c) 60,3°