

Grenzwerte

Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion f für x gegen eine Stelle a ($x \rightarrow a$) bzw. x gegen plus oder minus unendlich ($x \rightarrow \pm\infty$), wenn sich beim Annähern von x an a ($x \rightarrow a$) bzw. $x \rightarrow \pm\infty$ die Funktionswerte $f(x)$ immer mehr der Zahl g annähern, diesen Zahlenwert aber nicht erreichen: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$ bzw. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = g$.

Nicht alle Funktionen haben einen Grenzwert. Existiert ein Grenzwert, so konvergiert die Funktion, im anderen Fall divergiert sie.

Bezeichnung	Schreibweise	Beschreibung
linksseitiger Grenzwert	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	wenn man sich der Zahl a nur von links nähert
rechtsseitiger Grenzwert	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	Entsprechend bei Annäherung nur von rechts; $\lim \sqrt{x}$ für $x \rightarrow 0$ ist z. B. nur von rechts möglich.
einseitiger Grenzwert	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Oberbegriff für links- oder rechtsseitigen Grenzwert; Anwendung insbes. an Definitionsrändern
uneigentlicher Grenzwert	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \pm\infty$	wenn bei Annäherung die Funktionswerte betragsmäßig unendlich groß werden (z. B. Polstellen)
(eigentlicher) Grenzwert	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$	wenn ein Grenzwert g existiert; obwohl g nie ganz erreicht wird, rechnet man mit g weiter linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert

WISSEN & TIPPS

- Ganzrationale Funktionen von **geradem** Grad verhalten sich für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ gleich, bei **ungeradem** Grad verhalten sie sich für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ entgegengesetzt.
- Wie sich eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = a_n \cdot x^n + \dots$ für $x \rightarrow +\infty$ verhält, hängt vom Vorzeichen des Koeffizienten a_n ab:
Für $x \rightarrow +\infty$ und $a_n > 0$ geht $f(x) \rightarrow +\infty$. Man schreibt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
Für $x \rightarrow +\infty$ und $a_n < 0$ geht $f(x) \rightarrow -\infty$. Man schreibt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
Das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ ergibt sich dann aus den beiden oben genannten Regeln.
- „Berechne“ einen Grenzwert, indem du untersuchst, ob sich die Funktionswerte in der Umgebung der betrachteten Stelle bzw. im Unendlichen einem bestimmten Wert g annähern oder ins Unendliche gehen.
- Für $n > m$ läuft x^n schneller als x^m (und „überwiegt“ deshalb).
- Das Grenzwertverhalten wird in erster Linie von e^x , dann von den Potenzen von x und danach vom $\ln x$ bestimmt.

BEISPIEL

Untersuche das Verhalten von $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x$ für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

Lösung:

Hier genügt es, sich die höchste Potenz anzusehen, denn diese überwiegt beim Verhalten im Unendlichen, die Koeffizienten der Potenzen sind zu vernachlässigen (d. h. $-1x^3$ zählt mehr als $3x^2$). $-x^3$ läuft für zunehmend größere, positive x -Werte ins negative Unendliche und für zunehmend betragsmäßig größere, negative x -Werte ins positive Unendliche.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 3x^2 - 5x = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 3x^2 - 5x = +\infty.$$

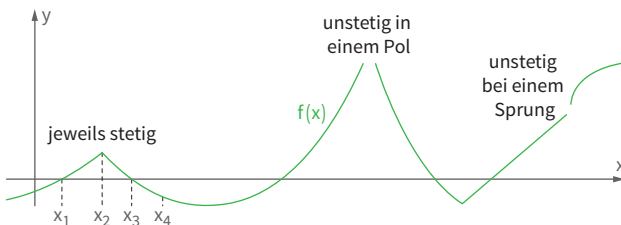
Stetigkeit

➡ Lokale Eigenschaft, d. h. wir untersuchen immer, ob die Funktion an einer Stelle x_0 stetig ist oder nicht.

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn:

- ➡ der Funktionswert an der Stelle x_0 existiert: $f(x_0)$ existiert,
- ➡ der Grenzwert an der Stelle x_0 existiert: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und
- ➡ der Funktionswert an der Stelle x_0 mit dem Grenzwert an der Stelle x_0 übereinstimmt: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

An Definitionslücken (Seite 23) und Stellen, an denen der Graph „springt“ ist die Funktion nicht stetig.



CHECKLISTE: GRUNDLAGEN DER ANALYSIS

Du solltest nun folgende Fragen beantworten können:

- ➡ Was versteht man unter einer Funktion?
- ➡ Welche Funktionsarten gibt es?
- ➡ Wie zeichnet man einen Funktionsgraphen?
- ➡ Wie kannst du eine Funktion durch Verschieben, Strecken/Stauchen oder Spiegeln verändern?
- ➡ Wie kannst du den Grenzwert einer Funktion ermitteln?
- ➡ Wie untersucht man eine Funktion auf Stetigkeit?



Lernzettel