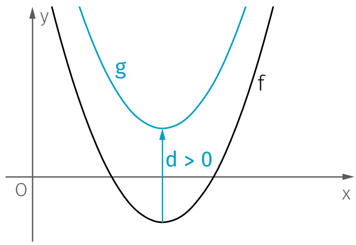
ENTWICKLUNG VON FUNKTIONEN

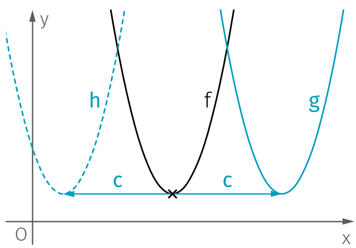
Verschieben eines Graphen in y- oder x-Achsenrichtung

Zentrale Kenntnisse

- Der Graph der Funktion g mit $\mathbf{g(x) = f(x) + d}$ ist gegenüber dem Graphen der Funktion f um d Längeneinheiten (LE) in y-Achsenrichtung verschoben. Und zwar bei $d > 0$ nach oben; und bei $d < 0$ nach unten. (In der Zeichnung ist $d > 0$.)



- Es sei $c > 0$. Dann ist der Graph der Funktion g mit $\mathbf{g(x) = f(x - c)}$ gegenüber dem Graphen der Funktion f um c Längeneinheiten in x-Achsenrichtung **nach rechts** verschoben.



- Es sei $c > 0$. Dann ist der Graph der Funktion h mit $\mathbf{h(x) = f(x + c)}$ gegenüber dem Graphen von f um c Längeneinheiten in x-Achsenrichtung **nach links** verschoben.

Abi Tipp

KLAMMERN SETZEN

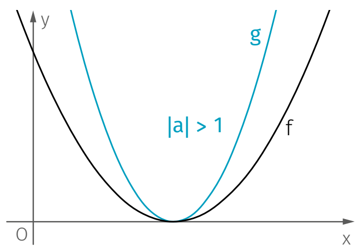
Wenn man den **Term** $\mathbf{f(x \pm c)}$ bestimmen will, muss man in dem Term von f(x) alle x-Variablen durch den Ausdruck „(x ± c)“ ersetzen. Man achte dabei darauf, **Klammern um „x ± c“ zu setzen !**

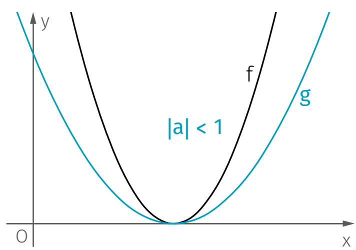
Beispiel 1:
Der Graph der Funktion g ist gegenüber dem Graphen von f mit $f(x) = (x-1)^2 + 2$ um 3 LE nach unten verschoben ist. Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an.
Lösung:
$g(x) = f(x) \mathbf{-3} = (x-1)^2 + 2 \mathbf{-3} = (x-1)^2 - 1$

Beispiel 2:
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 2x$. Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch Verschieben um 3 LE nach rechts. Der Graph von h entsteht aus dem Graphen von f durch Verschieben um 1 LE nach links. Geben Sie die Funktionsgleichungen von g und h an.
Lösung:
$g(x) = f(\mathbf{x-3}) = (\mathbf{x-3})^2 + 2(\mathbf{x-3}) = x^2 - 6x + 9 + 2x - 6 = x^2 - 4x + 3.$
$h(x) = f(\mathbf{x+1}) = (\mathbf{x+1})^2 + 2(\mathbf{x+1}) = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 = x^2 + 4x + 3.$

Strecken und Stauchen eines Graphen in y-Achsenrichtung

Zentrale Kenntnisse





- Der Graph der Funktion g mit $\mathbf{g(x) = a \cdot f(x)}$ entsteht aus dem Graphen von f, indem man den Graphen von f vertikal mit dem Faktor |a| streckt bzw. staucht.
- Bei $\mathbf{|a| > 1}$ wird der Graph von f vertikal gestreckt, also in die Länge gezogen.
- Bei $\mathbf{|a| < 1}$ wird der Graph von f vertikal gestaucht, also zusammengedrückt.
- Wenn $\mathbf{a < 0}$ ist, dann wird der Graph von f zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.
- **Schnittpunkte mit der x-Achse** ändern beim Strecken bzw. Stauchen in y-Achsenrichtung ihre Lage nicht.

Ein **Spezialfall** liegt vor bei **$a = -1$**. Dann geht der Graph von g mit **$g(x) = -f(x)$** durch eine einfache **Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse** hervor.

GRAFISCHE BESTIMMUNG DES FAKTORS a

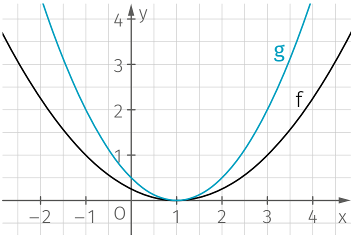
Wenn man den **Streck- bzw. Stauchfaktor a anhand der Graphen** von f und g mit $g(x) = a \cdot f(x)$ bestimmen will, kann man wie folgt vorgehen:

Zuerst zeichnet man an einer Stelle $x = u$ eine Vertikale, die den Graphen von f im Punkt $P(u|f(u))$ und den Graphen von g im Punkt $Q(u|g(u))$ schneidet.

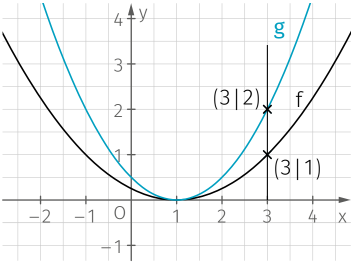
Die Vertikale $x = u$ sollte man dabei möglichst so legen, dass die Punkte $P(u|f(u))$ und $Q(u|g(u))$ Gitterpunkte sind.

Der **Quotient $g(u):f(u)$** ist dann der gesuchte Streck- bzw. Stauchfaktor a.

Beispiel 3:
Der Graph von g ist aus dem Graphen von f mit $f(x) = 0{,}25(x-1)^2$ durch Streckung in y-Achsenrichtung hervorgegangen.
Bestimmen Sie anhand des Schaubilds den Streckfaktor a und geben Sie die Funktionsgleichung von g an.



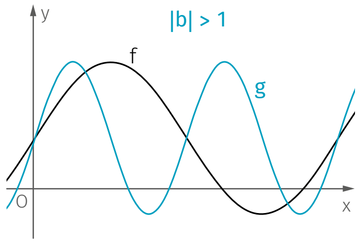
Lösung:
Auf der Vertikalen $x = 3$ liegen die Punkte $P(3|f(3))$ und $Q(3|g(3))$ mit $f(3) = 1$ und $g(3) = 2$.
Damit folgt:
$a = g(3):f(3) = 2$
und
$g(x) = 0{,}5(x-1)^2$

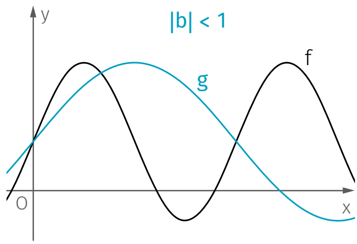


Strecken und Stauchen eines Graphen in x-Achsenrichtung

Zentrale Kenntnisse

- Der Graph der Funktion g mit $\mathbf{g(x) = f(b \cdot x)}$ entsteht aus dem Graphen von f, indem man den Graphen von f horizontal, also in x-Achsenrichtung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$ streckt bzw. staucht.
- Bei $\mathbf{|b| > 1}$ wird der Graph von f horizontal gestaucht, also gequetscht.
- Bei $\mathbf{|b| < 1}$ wird der Graph von f horizontal gestreckt, also in die Länge gezogen.
- Wenn $\mathbf{b < 0}$ ist, dann wird der Graph von f zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.





- **Ein Schnittpunkt mit der y-Achse** ändert beim Strecken bzw. Stauchen in x-Achsenrichtung seine Lage nicht.
- Ein **Spezialfall** liegt vor bei $\mathbf{b = -1}$. Dann geht der Graph von g mit $\mathbf{g(x)} = \mathbf{f(-x)}$ durch eine einfache **Spiegelung des Graphen von f an der y-Achse** hervor.

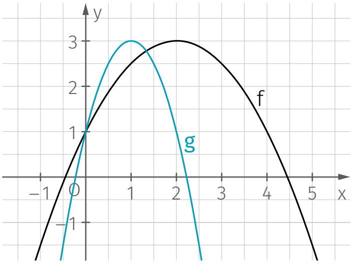
Beim **Strecken in x-Achsenrichtung** muss $|b| < 1$ sein.
Beim **Strecken in y-Achsenrichtung** ist es gerade umgekehrt!
Da muss $|a| > 1$ sein (→ Seite 12).

Abi Tipp

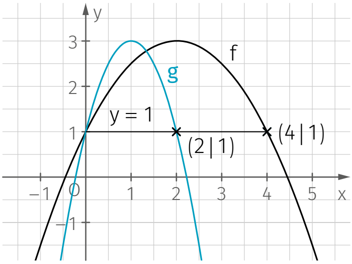
DEN FAKTOR b GRAFISCH BESTIMMEN

Zuerst zeichnet man die Horizontale $y = c$, die den Graphen von f im Punkt $P(u|c)$ und den Graphen von g im Punkt $Q(v|c)$ schneidet. Für den Streck- bzw. Stauchfaktor b in $g(x) = f(b \cdot x)$ gilt dann: $b = \frac{u}{v}$

Beispiel 4:
Der Graph von g ist aus dem Graphen von f mit $f(x) = -0{,}5\,x^2 + 2\,x + 1$ durch Stauchen in x-Achsenrichtung hervorgegangen.
Bestimmen Sie anhand des Schaubilds den Stauchfaktor b und geben Sie die Funktionsgleichung von g an.



Lösung:
Mit den Punkten P(4 | 1) und Q(2 | 1) folgt:
b = 4 : 2 = 2 und
$\mathbf{g(x)} = f(\mathbf{2\,x})$
$= -0{,}5 \cdot (\mathbf{2\,x})^2 + 2 \cdot (\mathbf{2\,x}) + 1$
$= \mathbf{-2\,x^2 + 4\,x + 1}$.

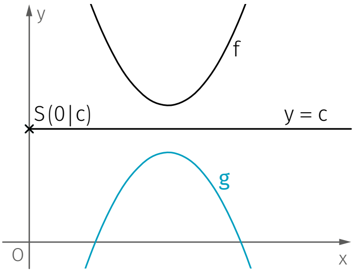


Spiegeln eines Graphen an der Horizontalen y = c

Zentrale Kenntnisse

- Jede **Gerade** $\mathbf{y = c}$ (mit $c \in \mathbb{R}$)[1] ist eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt S(0 | c).

- Spiegelt man den Graphen einer Funktion f an der Horizontalen $y = c$, erhält man den Graphen der Funktion g mit $\mathbf{g(x) = 2\,c - f(x)}$.
  (Hinweis: Diese Gleichung folgt aus der Symmetriebedingung $f(x) - c = c - g(x)$)



1 Beachten Sie: Die Benennung der Variablen (hier b, c) kann variieren.

Beispiel 5:
Der Graph von f mit $f(x) = x^2 - 6x + 13$ werde an der Geraden $y = 3$ gespiegelt. Man erhält so den Graphen von g.
Bestimmen Sie rechnerisch eine Funktionsgleichung von g.
Lösung:
Mit $c = 3$ und der Formel $g(x) = 2c - f(x)$ erhält man:
$g(x) = 6 - f(x) = 6 - [x^2 - 6x + 13] = \mathbf{-x^2 + 6x - 7.}$

ENTWICKLUNG VON FUNKTIONEN — Checkliste

Folgende Fragen sollten Sie nun mühelos beantworten können:

- Wie geht der Graph von g mit $\mathbf{g(x) = f(x) + d}$ aus dem Graphen von f hervor?
- Wie geht der Graph von g mit $\mathbf{g(x) = f(x - c)}$ bzw. $\mathbf{g(x) = f(x + c)}$ aus dem Graphen von f hervor? (jeweils mit $c > 0$)
- Wie geht der Graph von g mit $\mathbf{g(x) = a \cdot f(x)}$ aus dem Graphen von f hervor, wenn $|a| > 1$ bzw. $|a| < 1$ ist? Was muss man zusätzlich beachten, wenn $a < 0$ ist?
- Wie geht der Graph von g mit $\mathbf{g(x) = f(b \cdot x)}$ aus dem Graphen von f hervor, wenn $|b| > 1$ bzw. $|b| < 1$ ist? Was muss man zusätzlich beachten, wenn $b < 0$ ist?
- Wie kann man anhand der Graphen von f und g mit $g(x) = a \cdot f(x)$ den Faktor a bestimmen?
- Wie kann man anhand der Graphen von f und g mit $g(x) = f(b \cdot x)$ den Faktor b bestimmen?
- Wie hängt g(x) mit f(x) zusammen, wenn der Graph von g achsensymmetrisch zum Graphen von f bezüglich der Spiegelachse $y = c$ ist?