

Jens Helling
Herausgeber: Klaus Schilling

Anwendungsbezogene Lineare Algebra

für die Allgemeine Hochschulreife an Beruflichen Schulen

1. Auflage

Bestellnummer 83017

 **Bildungsverlag EINS**

Haben Sie Anregungen oder Kritikpunkte zu diesem Produkt?
Dann senden Sie eine E-Mail an 83017_001@bv-1.de.
Autor und Verlag freuen sich auf Ihre Rückmeldung.

www.bildungsverlag1.de

Bildungsverlag EINS GmbH
Hansestraße 115, 51149 Köln

ISBN 978-3-427-**83017-7**

© Copyright 2014: Bildungsverlag EINS GmbH, Köln
Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.
Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Vorwort

Der vorliegende Band ist einer von drei Bänden aus der Reihe „Anwendungsbezogene Mathematik“. Zusätzlich ist eine Formelsammlung erhältlich, die die drei Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra und Stochastik abdeckt.

Ziel ist, die Frage „Und wofür braucht man das?“ anhand **anwendungsbezogener Aufgaben- und Problemstellungen** beispielhaft zu beantworten.

Bei der Erstellung dieses Schulbuches wurde besonderer Wert auf eine für Schülerinnen und Schüler **anschauliche und verständliche Darstellung** der mathematischen Inhalte und Verfahren gelegt, damit sie mit diesem Buch **eigenständig** im Unterricht und zu Hause arbeiten können.

Eine große Zahl von **anwendungsbezogenen Lernsituationen mit ausführlich dargestellten, algebraischen und rechnergestützten Lösungen** ermöglicht den Schülerinnen und Schülern einen selbstständigen Erwerb mathematischer und anwendungsbezogener Kompetenzen. Sämtliche Lernsituationen mit Lösungsweg sind mit dem nebenstehenden Puzzle-Symbol und einem blauen Balken gekennzeichnet.



Für die Situationen und dazugehörigen Lösungen wichtige Informationen sind mit einem Informationssymbol und einem gelben Balken markiert.



Ein Teil der Aufgaben kann auch mit einem **grafikfähigen Taschenrechner (GTR)** oder einem **Computer-Algebra-System (CAS)** gelöst werden. Ein Taschenrechnersymbol kennzeichnet Lösungen, die mit einem TI-84 Plus berechnet wurden. Darüber hinaus befindet sich im Anhang eine Übersicht mit allen wichtigen Funktionen des Taschenrechners für das Sachgebiet Lineare Algebra.



Die **mehr als 100 überwiegend anwendungsbezogenen Übungsaufgaben** bieten Gelegenheit, das Gelernte zu festigen. Sie werden durch das Verzahnungssymbol und einen grünen Balken gekennzeichnet.



Am Ende jedes Kapitels finden sich weitere **offene Lernsituationen** zum jeweiligen Kapitel. Diese eignen sich besonders zur **Verknüpfung unterschiedlicher Kompetenzen** und können auch zum Einstieg in ein neues Themengebiet verwendet werden.

Ich wünsche allen Schülerinnen und Schülern sowie allen Kolleginnen und Kollegen mit diesem Buch viel Erfolg im Unterricht.

Jens Helling

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Zeichen, Symbole und verwendete Bezeichnungen	6
1 Grundlagen der Matrizen- und Vektorrechnung	9
1.1 Matrizen und Vektoren	9
1.2 Besondere Matrizen	14
1.2.1 Quadratische Matrix	14
1.2.2 Einheitsmatrix	16
1.2.3 Diagonalmatrix	17
1.2.4 Dreiecksmatrix	17
1.2.5 Nullmatrix	18
1.2.6 Transponierte Matrix	18
1.3 Grundlegende Rechenoperationen	20
1.3.1 Addition und Subtraktion	20
1.3.2 Skalarmultiplikation	22
1.3.3 Multiplikation von Vektoren	23
1.3.4 Multiplikation von Matrix und Vektor	29
1.3.5 Multiplikation von Matrizen	33
1.3.6 Inverse Matrix	36
1.4 Offene Lernsituationen zu den Grundlagen der Matrizen- und Vektorrechnung	50
2 Lineare Gleichungssysteme	53
2.1 Einführung	53
2.2 Lösungsverfahren	55
2.2.1 Gauß-Algorithmus	55
2.2.2 Cramer'sche Regel	61
2.3 Lösbarkeitsuntersuchungen	70
2.3.1 Rang einer Matrix	70
2.3.2 Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme	71
2.3.3 Mehrdeutig lösbare lineare Gleichungssysteme	72
2.3.4 Nicht lösbare lineare Gleichungssysteme	74
2.4 Offene Lernsituationen zu linearen Gleichungssystemen	78

3	Mehrstufige Produktionsprozesse	82
3.1	Darstellungsarten	82
3.2	Produktionsmengen und Bedarfsplanung	87
3.3	Produktionskosten und Gewinn	100
3.4	Offene Lernsituationen zu mehrstufigen Produktionsprozessen	111
4	Käufer- und Wählerverhalten	116
4.1	Darstellungsarten	116
4.2	Fixvektor	123
4.3	Grenzmatrix	131
4.4	Offene Lernsituationen zum Käufer- und Wählerverhalten	135
5	Populationsentwicklung	139
5.1	Darstellungsarten	139
5.2	Zyklisch stabile Populationen	143
5.3	Zyklisch abnehmende Populationen	149
5.4	Zyklisch unbegrenzt wachsende Populationen	153
5.5	Offene Lernsituationen zur Populationsentwicklung	157
6	Leontief-Modell	159
6.1	Darstellungsarten	159
6.2	Veränderung der Produktionsmenge	166
6.3	Änderung des Konsumverhaltens	174
6.4	Leontief-Modell mit Parametern	180
6.5	Offene Lernsituationen zum Leontief-Modell	190
7	Lineare Optimierung	193
7.1	Grafische Lösung	194
7.2	Eckpunktmethode	201
7.3	Simplex-Algorithmus	210
7.4	Offene Lernsituationen zur linearen Optimierung	221
	GTR-Funktionen	225
	Sachwortverzeichnis	230
	Bildquellenverzeichnis	232

Mathematische Zeichen, Symbole und verwendete Bezeichnungen

Zeichen, Symbol, Abkürzung	Sprechweise, Bedeutung	Beispiel
=	gleich	$4 = 4$
\neq	ungleich	$3 \neq 4$
\approx	ist ungefähr gleich	$0,1995 \approx 0,2$
<	kleiner als	$3 < 4$
>	größer als	$4 > 3$
\leq	kleiner gleich	$x \leq 3$
\geq	größer gleich	$x \geq 4$
{ }	Menge	$L = \{1;2;3\}$
$ b $	Betrag von b	$ -3 = 3$
∞	unendlich	
\Rightarrow	daraus folgt	$L = \{1;2;3\} \Rightarrow 1 \in L$
\Leftrightarrow	gleichbedeutend mit, ist äquivalent mit/zu	$a + b = c \Leftrightarrow b = \frac{c}{a}$
\sim	lässt sich umformen zu	$\left(\begin{array}{cc c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$
\wedge	und	
\vee	oder	
	für die gilt	$\{x \mid x > 3\}$
\in	Element von	$1 \in \mathbb{Z}$
\notin	nicht Element von	$0, 5 \notin \mathbb{Z}$
\exists	es existiert	$\exists B \mid A \cdot B = B \cdot A = E$
$A_{z \times s} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{z1} & a_{z2} & \cdots & a_{zs} \end{pmatrix}_{z \times s}$	Matrix A mit den Elementen $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{zs}$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
A^T	Transponierte Matrix A	$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
A^{-1}	Inverse (Matrix) zur Matrix A	$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{91} & \frac{15}{91} & -\frac{1}{7} \\ \frac{37}{182} & -\frac{11}{91} & \frac{1}{14} \\ -\frac{19}{91} & -\frac{1}{91} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Zeichen, Symbol, Abkürzung	Sprechweise, Bedeutung	Beispiel
$A \vec{v}$	Um den Vektor \vec{v} erweiterte Matrix A (Koeffizientenmatrix)	$A \vec{v} = \left(\begin{array}{ccc c} 3 & 8 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 9 & 3 \end{array} \right)$
$\det(A) = A $	Determinante der Matrix A	$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = -2$
$\text{rg}(A)$	Rang der Matrix A	$\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = 2$
E	Einheitsmatrix	$E_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$
O	Nullmatrix	$O_{z \times s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{z \times s}$
$\vec{a}_{z \times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_z \end{pmatrix}_{z \times 1}$	Spaltenvektor a	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\vec{b}_{1 \times s} = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_s)_{1 \times s}$	Zeilenvektor b	$\vec{v} = (3 \ 5 \ \cdots \ 4)$
RZ	Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix (1. Produktionsmatrix)	$RZ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
ZE	Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix (2. Produktionsmatrix)	$ZE = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
RE	Rohstoff-Endprodukt-Matrix (Bedarfsmatrix)	$RE = \begin{pmatrix} 16 & 31 \\ 37 & 73 \end{pmatrix}$
\vec{m}	Produktionsmengenvektor	$\vec{m} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$
\vec{r}	Rohstoffbedarfsvektor	$\vec{r} = \begin{pmatrix} 780 \\ 1830 \end{pmatrix}$
\vec{k}_R	Rohstoffkosten	$\vec{k}_R = (5 \ 3)$
\vec{k}_Z	Herstellkosten der Zwischenprodukte	$\vec{k}_Z = (7 \ 1 \ 2)$
\vec{k}_E	Fertigungskosten der Endprodukte	$\vec{k}_E = (10 \ 15)$
\vec{v}_0	Anfangsverteilung	$\vec{v}_0 = (0,8 \ 0,2)$

Zeichen, Symbol, Abkürzung	Sprechweise, Bedeutung	Beispiel
$\vec{v}_\infty = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)_{1 \times n}$	Fixvektor	$\vec{v}_\infty = (0,2 \ 0,3 \ 0,5)$
$A_\infty = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}_{n \times n}$	Grenzmatrix	$A_\infty = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$
$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	Gesamtproduktionsvektor	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$
$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$	Konsumvektor	$\vec{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$
$S_{n \times n} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}_{n \times n}$	Sektorenmatrix	$S = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
$T_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{s_{11}}{x_1} & \frac{s_{12}}{x_2} \\ \frac{s_{21}}{x_1} & \frac{s_{22}}{x_2} \end{pmatrix}_{n \times n}$	Technologiematrix	$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{15} \\ \frac{3}{20} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

3

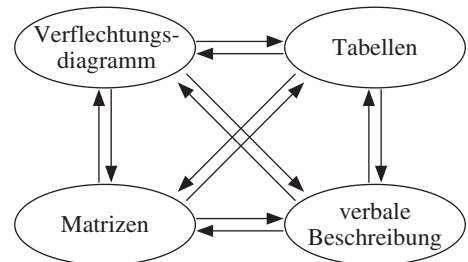
Mehrstufige Produktionsprozesse



3.1 Darstellungsarten



In der Realität werden in Industrieunternehmen häufig Rohstoffe zu Zwischenprodukten verarbeitet und aus diesen Zwischenprodukten die Endprodukte produziert. Um z. B. bei einer eingehenden Bestellung einen Überblick darüber zu erhalten, ob die zur Produktion benötigten Rohstoffe am Lager sind, kann mithilfe der Matrizenrechnung der Rohstoffbedarf für die zu produzierenden Endprodukte berechnet werden.



Der Produktionsprozess kann dabei auf vier verschiedene Arten beschrieben werden, die alle gleichwertig sind und sich jeweils in jede andere Darstellungsart umwandeln lassen.

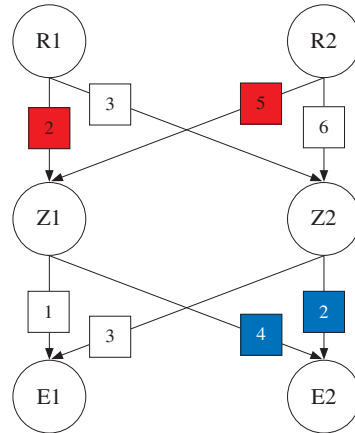
Verflechtungsdiagramm

Mithilfe eines **Verflechtungsdiagramms** oder auch **Gozintographen**¹⁾ lassen sich auch komplexere Produktionsprozesse übersichtlich darstellen. Der nebenstehende Gozintograph bildet einen **zweistufigen Produktionsprozess** mit jeweils zwei Rohstoffen R, Zwischenprodukten Z und Endprodukten E ab.

Dabei wird deutlich, dass für die Produktion von 1 ME des Zwischenprodukts Z1 **2 ME** vom Rohstoff R1 und **5 ME** vom Rohstoff R2 benötigt werden.

Darüber hinaus werden **4 ME** von Z1 und **2 ME** von Z2 benötigt, um 1 ME vom Endprodukt E2 zu produzieren.

Die übrigen Zahlen sind entsprechend zu interpretieren.



Tabellen

Die in dem Verflechtungsdiagramm enthaltenen Informationen lassen sich auch mithilfe von Tabellen darstellen. Für jede Produktionsstufe wird dabei eine eigene Tabelle aufgestellt.

1. Produktionsstufe

Rohstoff → Zwischenprodukt

↗	Z1	Z2
R1	2	3
R2	5	6

2. Produktionsstufe

Zwischenprodukt → Endprodukt

↗	E1	E2
Z1	1	4
Z2	3	2

Matrizen

Der Produktionsprozess lässt sich auch mithilfe von Matrizen eindeutig beschreiben. Jede Produktionsstufe wird durch eine eigene Matrix dargestellt. Matrizen werden in der Regel mit einem Großbuchstaben benannt. Im Falle von Produktionsprozessen ist es zweckmäßig, die Matrizen gemäß ihrer Aussage zu benennen.

¹⁾ in Anlehnung an (engl.): (the part that) goes into

1. Produktionsmatrix

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix
(*RZ*-Matrix)

$$RZ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Produktionsmatrix

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix
(*ZE*-Matrix)

$$RZ = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Verbale Beschreibung

Ein Unternehmen produziert in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R1 und R2 die Zwischenprodukte Z1 und Z2, die dann zu den Endprodukten E1 und E2 weiterverarbeitet werden:

Für die Produktion von 1 ME Z1 werden 2 ME von R1 und 5 ME von R2 benötigt.

Für die Produktion von 1 ME Z2 werden 3 ME von R1 und 6 ME von R2 benötigt.

Für die Produktion von 1 ME E1 werden 1 ME von Z1 und 3 ME von Z2 benötigt.

Für die Produktion von 1 ME E2 werden 4 ME von Z1 und 2 ME von Z2 benötigt.

Situation 1

In einem Industrieunternehmen werden in einem zweistufigen Produktionsprozess drei Endprodukte hergestellt. Der Produktionsprozess wird durch die beiden Tabellen beschrieben.

↗	Z1	Z2	↗	E1	E2	E3
R1	5	3	Z1	3	1	4
R2	2	1	Z2	6	5	2
R3	4	6				

Beschreiben Sie den Produktionsprozess verbal, durch Matrizen und mithilfe eines Verflechtungsdiagramms.

Lösung**Verbale Beschreibung**

In einem Industrieunternehmen werden in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R1, R2 und R3 zunächst die Zwischenprodukte Z1 und Z2 gefertigt, die anschließend zu den Endprodukten E1, E2 und E3 weiterverarbeitet werden.

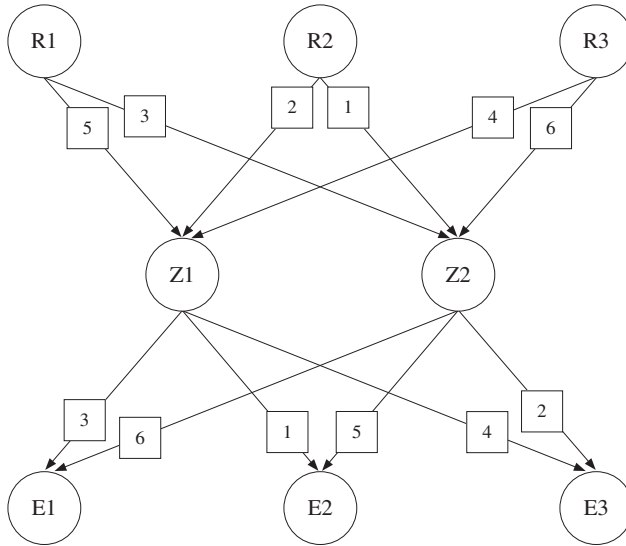
Für die Produktion von 1 ME Z1 werden 5 ME von R1, 2 ME von R2 und 4 ME von R3 benötigt. Für die Produktion von 1 ME Z2 werden 3 ME von R1, 1 ME von R2 und 6 ME von R3 benötigt.

Für die Produktion von 1 ME E1 werden 3 ME von Z1 und 6 ME von Z2 benötigt. Für die Produktion von 1 ME E2 werden 1 ME von Z1 und 5 ME von Z2 benötigt. Für die Produktion von 1 ME E3 werden 4 ME von Z1 und 2 ME von Z2 benötigt.

Matrizen

$$RZ = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

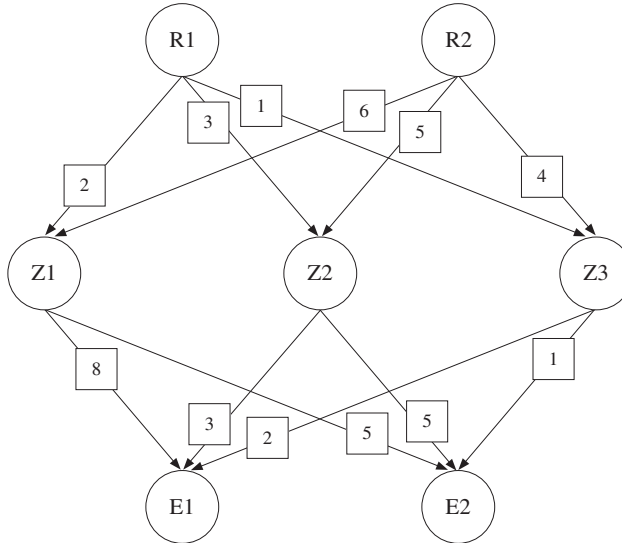
$$ZE = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Verflechtungsdiagramm



Übungsaufgaben

- 1 In einem Industriebetrieb lässt sich der Produktionsprozess durch ein Verflechtungsdiagramm beschreiben.



Stellen Sie die **RZ**-Matrix und die **ZE**-Matrix auf.

- 2 Der Produktionsprozess in einem Industrieunternehmen lässt sich durch die beiden Matrizen beschreiben.

$$RZ = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$ZE = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Erstellen Sie das dazugehörige Verflechtungsdiagramm.

- 3 In einem Industriebetrieb werden aus den vier Rohstoffen R1 bis R4 die drei Zwischenprodukte Z1 bis Z3 hergestellt, die Grundlage für die Produktion der drei Endprodukte E1 bis E3 sind.

Für die Produktion von 1 ME Z1 werden 3, 4, 6 und 2 ME von R1, R2, R3 und R4 benötigt. Für die Produktion von 1 ME Z2 werden 2, 5, 1 und 3 ME von R1, R2, R3 und R4 benötigt. Für die Produktion von 1 ME Z3 werden 7, 3, 5 und 4 ME von R1, R2, R3 und R4 benötigt.

Für die Produktion von 1 ME E1 werden 3, 4 und 5 ME von Z1, Z2 und Z3 benötigt. Für die Produktion von 1 ME E2 werden 2, 6 und 3 ME von Z1, Z2 und Z3 benötigt. Für die Produktion von 1 ME E3 werden 8, 3 und 6 ME von Z1, Z2 und Z3 benötigt.

- Stellen Sie die **RZ**-Matrix und die **ZE**-Matrix auf.
- Erstellen Sie das dazugehörige Verflechtungsdiagramm.

3.2 Produktionsmengen und Bedarfsplanung

Eine **RZ**-Matrix beschreibt die erste Produktionsstufe. Sie wird daher auch häufig **1. Produktionsmatrix** genannt. Die Dimension von **RZ** gibt an, wie viele unterschiedliche Rohstoffe (Zeilen) in der ersten Produktionsstufe verwendet und wie viele unterschiedliche Zwischenprodukte (Spalten) hergestellt werden.

$$RZ_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

In dieser **RZ**-Matrix gibt es somit zwei Rohstoffe, die zu drei Zwischenprodukten verarbeitet werden.

Eine **ZE**-Matrix beschreibt die zweite Produktionsstufe. Sie wird daher auch häufig **2. Produktionsmatrix** genannt. Analog zu **RZ** gibt die Dimension von **ZE** an, aus wie vielen unterschiedlichen Zwischenprodukten (Zeilen) wie viele unterschiedliche Endprodukte (Spalten) produziert werden.

$$ZE_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

In dieser **ZE**-Matrix gibt es somit drei Zwischenprodukte, aus denen vier Endprodukte produziert werden.

Werden die beiden Matrizen miteinander multipliziert, so ergibt sich $RZ_{2 \times 3} \cdot ZE_{3 \times 4} = RE_{2 \times 4}$. Aus der Dimension der entstandenen **Rohstoff-Endprodukt-Matrix (RE-Matrix)** oder auch **Bedarfsmatrix** lässt sich ablesen, dass aus zwei unterschiedlichen Rohstoffen vier unterschiedliche Endprodukte produziert werden.

$$RE = RZ \cdot ZE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 44 & 50 & 56 \\ 83 & 98 & 113 & 128 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Elemente von **RE** geben den Rohstoffbedarf der Endprodukte an. So bedeutet $re_{23} = 113$, dass 113 ME vom Rohstoff R2 benötigt werden, um 1 ME des Endproduktes E3 herzustellen.

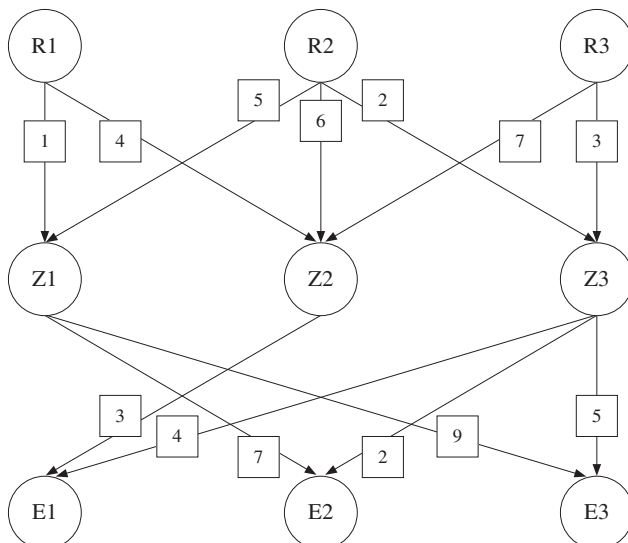
$$RZ \cdot ZE = RE$$

Bedarfsmatrix
(Rohstoff-Endprodukt-Matrix)



Situation 1

In einem Industriebetrieb lässt sich der zweistufige Produktionsprozess durch das nachfolgende Verflechtungsdiagramm beschreiben.



Erstellen Sie die Rohstoff-Zwischenprodukt- sowie die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix und berechnen Sie den Rohstoffbedarf für jedes Endprodukt.

Lösung

$$RZ = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad ZE = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$RE = RZ \cdot ZE = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 \\ 26 & 39 & 55 \\ 33 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Für die Produktion von 1 ME E3 werden **9 ME** von R1 benötigt. Für die Produktion von 1 ME E1 werden **26 ME** von R2 benötigt. Die übrigen Elemente sind entsprechend zu interpretieren.

Die **Bedarfsmatrix** (**RE**-Matrix) gibt immer nur den Rohstoffbedarf für jeweils eine Mengeneinheit der Endprodukte an. Um den **Rohstoffbedarfsvektor** \vec{r} einer anderen Produktionsmenge bestimmen zu können, muss die Bedarfsmatrix **RE** mit dem **Produktionsmengenvektor** \vec{m} multipliziert werden.



$$RE \cdot \vec{m} = \vec{r}$$

Rohstoffbedarfsvektor

Situation 2

Ein Pharmakonzern stellt aus den Chemikalien C1 bis C3 zunächst die Grundmischungen G1 bis G4 her, die dann zu den Medikamenten M1 und M2 weiterverarbeitet werden. Der Produktionsprozess lässt sich durch die beiden nachfolgenden Tabellen beschreiben.

↗	G1	G2	G3	G4	↗	M1	M2
C1	5	4	2	6	G1	1	3
C2	6	2	8	1	G2	4	6
C3	2	4	6	2	G3	7	2
					G4	3	2

Der Pharmakonzern möchte 30 ME vom Medikament M1 und 50 ME vom Medikament M2 herstellen. Berechnen Sie, wie viel ME der drei Chemikalien jeweils benötigt werden (Rohstoffbedarf).

Lösung

$$CG = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad GM = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$CM = CG \cdot GM = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 55 \\ 73 & 48 \\ 66 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = CM \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} 53 & 55 \\ 73 & 48 \\ 66 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4340 \\ 4590 \\ 4280 \end{pmatrix}$$

Für die Produktion von 30 ME des Medikaments M1 und 50 ME des Medikaments M2 werden 4340 ME der Chemikalie C1, 4590 ME der Chemikalie C2 und 4280 ME der Chemikalie C3 benötigt.



Bislang waren bei allen Aufgaben immer die 1. und 2. Produktionsmatrix bekannt, z.B. RZ und ZE . Die Bedarfsmatrix RE ließ sich dann als das Produkt von $RZ \cdot ZE$ bestimmen.

Wenn in einer Aufgabe jedoch nur eine der Produktionsmatrizen RZ oder ZE und die Bedarfsmatrix RE gegeben sind, lässt sich die fehlende Produktionsmatrix mithilfe der Inversen der gegebenen Produktionsmatrix¹⁾ bestimmen.

Bestimmung der 1. Produktionsmatrix

$$RZ \cdot ZE = RE$$

$$RZ \cdot ZE \cdot ZE^{-1} = RE \cdot ZE^{-1}$$

$$RZ \cdot E = RE \cdot ZE^{-1}$$

$$RZ = RE \cdot ZE^{-1}$$

$$RZ = RE \cdot ZE^{-1}$$

Bestimmung der 1. Produktionsmatrix
(2. Produktions- und Bedarfsmatrix sind gegeben)

Bestimmung der 2. Produktionsmatrix

$$RZ \cdot ZE = RE$$

$$RZ^{-1} \cdot RZ \cdot ZE = RZ^{-1} \cdot RE$$

$$E \cdot ZE = RZ^{-1} \cdot RE$$

$$ZE = RZ^{-1} \cdot RE$$

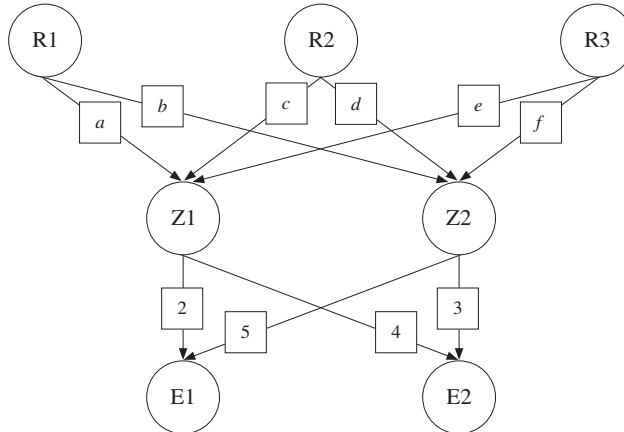
$$ZE = RZ^{-1} \cdot RE$$

Bestimmung der 2. Produktionsmatrix
(1. Produktions- und Bedarfsmatrix sind gegeben)

¹⁾ Unter der Voraussetzung, dass die gegebene Produktionsmatrix eine quadratische Matrix ist.

Situation 3

In einem Industriebetrieb werden aus den Rohstoffen R1, R2 und R3 die Zwischenprodukte Z1 und Z2 hergestellt, die dann zu den Endprodukten E1 und E2 weiterverarbeitet werden. Die dafür benötigten Mengen [ME] lassen sich dem Verflechtungsdiagramm entnehmen.



Bestimmen Sie die Variablen a bis f zur Bedarfsmatrix $\mathbf{RE} = \begin{pmatrix} 24 & 20 \\ 31 & 27 \\ 32 & 22 \end{pmatrix}$.

Lösung

Aus dem Verflechtungsdiagramm lässt sich die 2. Produktionsmatrix (\mathbf{ZE}) bestimmen:

$$\mathbf{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Variablen a bis f sind Elemente der 1. Produktionsmatrix $\mathbf{RZ} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$. Es gilt

$\mathbf{RZ} = \mathbf{RE} \cdot \mathbf{ZE}^{-1}$. Daher wird die Inverse von \mathbf{ZE} benötigt. Diese kann mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus, mithilfe der Determinante oder dem GTR bestimmt werden.

Bestimmung der Inversen mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 5 \\ | \cdot 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 2 \end{array} \right) | -I$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 14 \\ | \cdot 20 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 140 & 280 & 70 & 0 \\ 0 & -280 & -100 & 40 \end{array} \right) | + \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 140 & 0 & -30 & 40 \\ 0 & -280 & -100 & 40 \end{array} \right) \begin{array}{l} | : 140 \\ | : (-280) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{14} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} \end{array} \right)$$

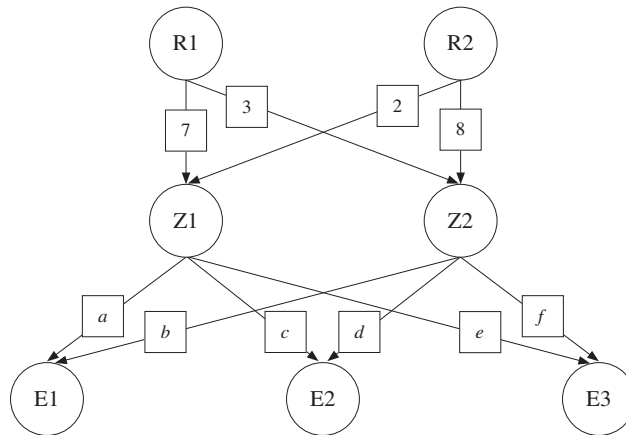
$$\mathbf{RZ} = \mathbf{RE} \cdot \mathbf{ZE}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 20 \\ 31 & 27 \\ 32 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

Situation 4

In einem Industriebetrieb werden aus den Rohstoffen R1 und R2 die Zwischenprodukte Z1 und Z2 hergestellt, die dann zu den Endprodukten E1, E2 und E3 weiterverarbeitet werden. Die dafür benötigten Mengen [ME] lassen sich dem Verflechtungsdiagramm entnehmen.



Bestimmen Sie die Variablen a bis f zur Bedarfsmatrix $\mathbf{RE} = \begin{pmatrix} 29 & 31 & 39 \\ 44 & 16 & 54 \end{pmatrix}$.

Lösung

Aus dem Verflechtungsdiagramm lässt sich die 1. Produktionsmatrix (**RZ**) bestimmen.

$$\mathbf{RZ} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Die Variablen a bis f sind Elemente der 2. Produktionsmatrix **ZE**. Es gilt $\mathbf{ZE} = \mathbf{RZ}^{-1} \cdot \mathbf{RE}$. Daher wird von **RZ** die Inverse benötigt. Diese kann mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus, mithilfe der Determinante oder dem GTR bestimmt werden.

Bestimmung der Inversen mithilfe der Determinante

$$\mathbf{RZ} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{RZ}^{-1} = \frac{1}{7 \cdot 8 - 3 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,16 & -0,06 \\ -0,04 & 0,14 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{ZE} = \mathbf{RZ}^{-1} \cdot \mathbf{RE}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,16 & -0,06 \\ -0,04 & 0,14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 & 31 & 39 \\ 44 & 16 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

- Die Matrix **RZ** ist die **1. Produktionsmatrix** und beschreibt die erste Produktionsstufe. Ihre Dimension gibt an, wie viele unterschiedliche Rohstoffe (Zeilen) in der ersten Produktionsstufe verwendet und wie viele unterschiedliche Zwischenprodukte (Spalten) hergestellt werden.
- Die Matrix **ZE** ist die **2. Produktionsmatrix** und beschreibt die zweite Produktionsstufe. Ihre Dimension gibt an, aus wie vielen unterschiedlichen Zwischenprodukten (Zeilen) wie viele unterschiedliche Endprodukte (Spalten) produziert werden.
- **RE** ist die **Bedarfsmatrix**. Die einzelnen Elemente von **RE** geben den Rohstoffbedarf der Endprodukte an. Die Anzahl der Zeilen gibt an, wie viele unterschiedliche Rohstoffe verwendet werden. Die Anzahl der Spalten gibt an, wie viele unterschiedliche Endprodukte produziert werden. Es gilt: $\mathbf{RZ} \cdot \mathbf{ZE} = \mathbf{RE}$.
- Der **Rohstoffbedarfsvektor** \vec{r} gibt an, wie viele Rohstoffe für die Produktion einer bestimmten Menge \vec{m} Endprodukte benötigt werden. Es gilt: $\mathbf{RE} \cdot \vec{m} = \vec{r}$.
- Die 1. Produktionsmatrix kann bei gegebener Bedarfsmatrix und gegebener quadratischer 2. Produktionsmatrix durch $\mathbf{RZ} = \mathbf{RE} \cdot \mathbf{ZE}^{-1}$ bestimmt werden.
- Die 2. Produktionsmatrix kann bei gegebener Bedarfsmatrix und gegebener quadratischer 1. Produktionsmatrix durch $\mathbf{ZE} = \mathbf{RZ}^{-1} \cdot \mathbf{RE}$ bestimmt werden.



Übungsaufgaben

- 1 In einem Industriebetrieb lässt sich der Produktionsprozess durch die Matrizen \mathbf{RZ} und \mathbf{ZE} beschreiben.

$$\mathbf{RZ} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Bedarfsmatrix und interpretieren Sie das Element re_{32} sowie die erste Zeilen- und die zweite Spaltensumme anwendungsbezogen.

- 2 Bestimmen Sie jeweils die fehlende Matrix.

a) $\mathbf{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 23 \\ 34 & 17 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{ZE} = \begin{pmatrix} 46 & 19 \\ 82 & 37 \\ 49 & 33 \end{pmatrix}$

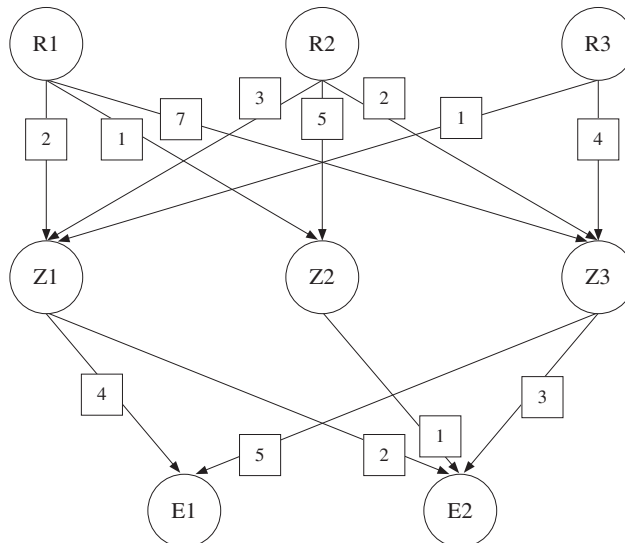
c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{ZE} = \begin{pmatrix} 42 & 44 \\ 84 & 100 \\ 56 & 57 \\ 43 & 55 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 54 & 70 \\ 10 & 13 & 17 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{CG} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 62 & 46 \\ 44 & 33 & 37 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{FT} = \begin{pmatrix} 29 & 19 \\ 44 & 53 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}$

- 3 Ein Getränkehersteller produziert aus drei Rohstoffen zunächst drei Zwischenprodukte in Sirupform, die anschließend zu zwei Multivitaminkonzentraten zusammengemischt werden. Der Verbraucher muss diese zu Hause nur noch mit Wasser verdünnen.



Bestimmen Sie den Rohstoffbedarf der beiden Konzentratsorten, wenn sich der Produktionsprozess durch das dargestellte Verflechtungsdiagramm beschreiben lässt.

- 4 Ein Schrankhersteller produziert aus Nägeln, Schrauben, Brettern und Leim zunächst die drei Grundkonstruktionen G1, G2 und G3, die anschließend zu sechs ähnlichen Schränken unterschiedlicher Größe zusammengestellt werden. Die nachfolgenden Tabellen beschreiben den Produktionsprozess eindeutig. Die Mengen sind in ME angegeben.

↗	G1	G2	G3
Schrauben	10	12	15
Nägel	20	14	30
Bretter	3	4	5
Leim	1	1	2

↗	S1	S2	S3	S4	S5	S6
G1	1	0	4	1	2	3
G2	2	3	2	1	2	3
G3	1	2	1	1	2	3

Berechnen Sie die benötigten Rohstoffmengen für jeden der sechs Schränke.

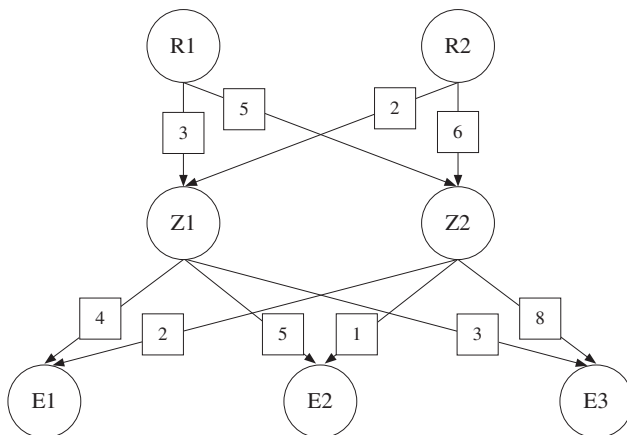
- 5 In einer Pralinenfabrik werden aus Zucker, Kakaobutter, Kakaomasse und Milchpulver zunächst die Schokoladensorten Bitterschokolade, Milkschokolade und weiße Schokolade hergestellt. Im letzten Produktionsschritt werden die drei Schokoladensorten zu den Pralinen „Tasty“, „Yummy“ und „Delish“ verarbeitet.

100 g Bitterschokolade enthalten 47 g Zucker, 5 g Kakaobutter und 48 g Kakaomasse. Dieselbe Menge Milkschokolade besteht aus 48 g Zucker, 18 g Kakaobutter, 12 g Kakaomasse und 22 g Milchpulver. 100 g weiße Schokolade enthalten 46 g Zucker und 28 g Kakaobutter, der Rest ist Milchpulver.

100 g Tasty-Pralinen bestehen jeweils zur Hälfte aus Bitter- und weißer Schokolade. 100 g Yummy bestehen zu jeweils einem Drittel aus allen drei Sorten und 100 g Delish werden aus 30 g Bitterschokolade, 20 g Milkschokolade und 50 g weißer Schokolade hergestellt.

Zeichnen Sie ein Verflechtungsdiagramm, das den Produktionsprozess der Pralinen beschreibt, und berechnen Sie den Rohstoffbedarf für jeweils 100 g Pralinen.

- 6 In einem Industriebetrieb lässt sich der Produktionsprozess durch das nachfolgende Verflechtungsdiagramm beschreiben.



Berechnen Sie den Rohstoffbedarfsvektor, wenn $\vec{m} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix}$ ist.

- 7 Ein Parfumerhersteller produziert aus Geranium, Neroli, Tuberose, Bergamotte und Wasser zunächst drei Essenzen, aus denen dann die Parfums „Sone“, „Arom“, „Apansch“ und „Erei“ hergestellt werden. Eine Drogeriekette bestellt für seine 135 Filialen alle vier Parfumsorten. Jede Filiale erhält 80 Flacons. Jeweils 20 % sind Sone, 30 % Arom und 10 % Apansch. Der Rest ist Erei.

Berechnen Sie den Rohstoffbedarf des Parfumerherstellers, wenn Ihnen diese Daten vorliegen:

\vec{r}	E1	E2	E3
Geranium	1	2	1
Neroli	2	3	1
Tuberose	3	3	3
Bergamotte	1	2	1
Wasser	20	50	30

\vec{r}	Sone	Arom	Apansch	Erei
E1	1	2	3	1
E2	2	2	1	3
E3	1	2	1	3

- 8 Ein Lebensmittelkonzern produziert vegetarische Fertiggerichte. Dazu werden aus den Zutaten Erbsen, Möhren, Kartoffeln und Soja zunächst die drei Grundkomponenten gemischt, aus denen dann drei verschiedene Bratlingmassen hergestellt werden.

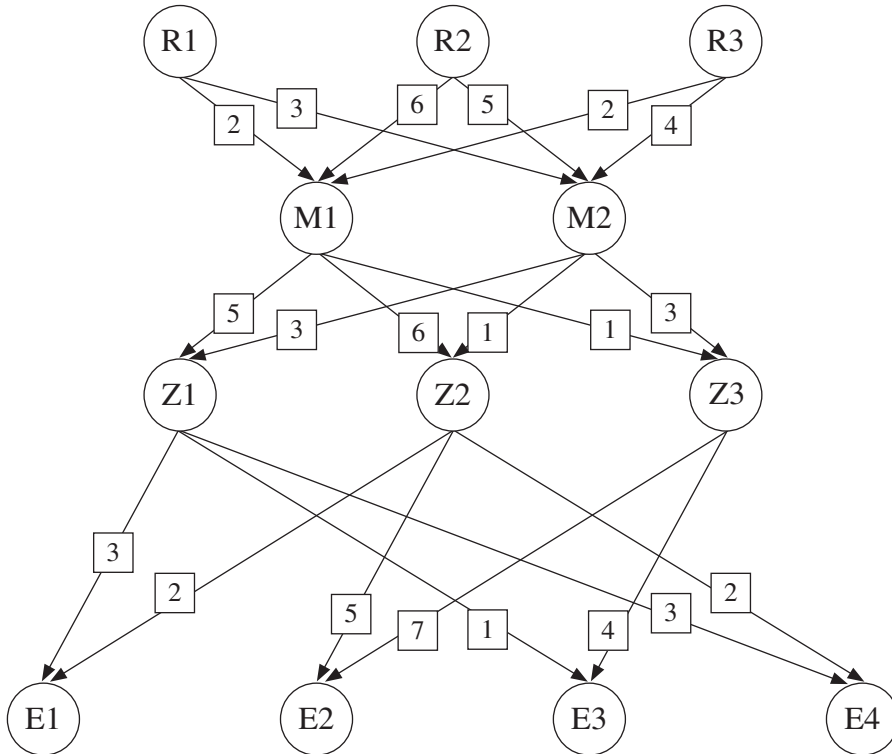
Für die Grundkomponente 1 werden 2 kg Erbsen, 3 kg Möhren, 5 kg Kartoffeln und 4 kg Soja benötigt. Für die Grundkomponente 2 werden 5 kg Möhren und 2 kg Soja benötigt. Die Grundkomponente 3 setzt sich aus jeweils 3 kg der vier Zutaten zusammen.

In die Bratlingmasse 1 gehen 5 kg, 3 kg und 2 kg der Grundkomponenten 1 bis 3 ein. In die Bratlingmasse 2 gehen 2 kg, 4 kg, und 1 kg der Grundkomponenten 1 bis 3 ein. Die Bratlingmasse 3 besteht zu jeweils 2 kg aus den Grundkomponenten 1 und 2.

Im Lager befinden sich noch 3 Tonnen Erbsen, 4 Tonnen Möhren, 10 Tonnen Kartoffeln sowie 2,5 Tonnen Soja.

Überprüfen Sie, ob sich unter diesen Voraussetzungen noch jeweils 200 ME Bratlingmasse produzieren lassen.

- 9 In einem Industriebetrieb werden aus drei Rohstoffen zunächst zwei Module gefertigt, die als Grundlage für drei Zwischenprodukte dienen. Aus den drei Zwischenprodukten werden im dritten Produktionsschritt vier Endprodukte gefertigt. Die in den einzelnen Produktionsstufen benötigten Mengen [ME] sind in dem nachfolgenden Verflechtungsdiagramm dargestellt.



Ein Kunde bestellt bei dem Unternehmen 10 ME von E1, 20 ME von E2 und jeweils 30 ME von E3 und E4. Im Lager befinden sich momentan noch jeweils 10000 ME der Rohstoffe R1 bis R3.

Berechnen Sie, welche Mengen gegebenenfalls noch nachbestellt werden müssen, um den Auftrag abwickeln zu können.

- 10 In einem Industriebetrieb werden aus den Rohstoffen R1, R2 und R3 zunächst die Zwischenprodukte Z1, Z2 und Z3 produziert und anschließend zu den vier Endprodukten E1 bis E4 weiterverarbeitet.

Die jeweils benötigten Mengen [ME] lassen sich dem Verflechtungsdiagramm auf der Folgeseite entnehmen.