Sichern und Vernetzen – Vermischte Aufgaben

Lösungen zu Kapitel 1

33

1 Welche Karten gehören zusammen?
B und H; F und G; E und C; I und A

2 Taschenrechnereinsatz
a) $4^{11} = 4\,194\,304$
b) $2^{13} = 8192$
c) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$ (10 Faktoren)
$4^{11} = 4\,194\,304$ (11 Faktoren)

3 Wissenschaftliche Schreibweise

a) $5 \cdot 10^2$	b) $2{,}35 \cdot 10^3$	c) $4{,}502 \cdot 10^5$	d) $45 \cdot 10^7$
$5 \cdot 10^3$	$2{,}35 \cdot 10^2$	$4{,}52 \cdot 10^5$	$3{,}4 \cdot 10^7$
$5 \cdot 10^5$	$2{,}35 \cdot 10$	$4{,}052 \cdot 10^5$	$0{,}8 \cdot 10^7$

4 Ordnen
a) $(-3)^3 < -3^2 < -2^3 = (-2)^3$
b) $-2^4 < 2^4 = 4^2 = (-4)^2$
c) $(-4^2)^3 = -(4^2)^3 < (-4^3)^2 < (-4)^{(2^3)}$
d) $(-4)^2 \cdot (-4^3) < -4^2 \cdot (-4^3) < (-4)^{2^3}$

5 Welche Zahlen gehören zusammen?
$\frac{6^3}{6^1} = 6^2$; $\frac{8^2}{4^2} = 2^2$; $(2^5)^3 = 2^{15}$; $\frac{100^4}{25^4} = 4^4$; $7^3 \cdot 5^3 = 35^3$; $4^2 \cdot 4^4 = 4^6$

6 Terme vereinfachen

a) $-a^5 \cdot b^3$	b) $\frac{x^4}{y^2}$	c) x^2	d) $-(x \cdot y)$	e) $xy\left(x^3 + y^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^3\right)$
f) x	g) x	h) $(x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$	i) $x^{\frac{15}{6}}$	j) x
k) 3^x	l) $-x^{\frac{11}{3}}$	m) 0		

7 Gleichungen lösen

a) $x = \sqrt[5]{500}$	b) $x = \left(\sqrt[5]{500}\right)^{-1}$	c) $x = \pm\sqrt[4]{18}$	d) keine Lösung.
e) $x = \sqrt[3]{\frac{125}{343}}$	f) $x = \frac{1}{2}$	g) $x = \sqrt[4]{8}$	

34

8 Hälfte einer Zweierpotenz
a) 2^{43}, denn $\frac{2^{44}}{2} = 2^{44-1} = 2^{43}$
b) 3^{14}, denn $\frac{3^{15}}{3} = 3^{14}$; $\frac{3^{15}}{2}$ kann nicht so angegeben werden, da es sich nicht um die gleiche Basis handelt.

9 Potenzen auf dem Zahlenstrahl
a) 500 $\quad \frac{1}{2000} \quad$ 495
b) (1) Der Abstand von 10^{-9} bis 10^3 (1000) ist länger als der Abstand von 10^{-3} bis 10^3 (999,999).
(2) Der Abstand von 10^1 bis 10^5 (99990) ist länger als der Abstand von 10^{-1} bis 10^{-5} (0,09999).

10 Wahr oder falsch?

a) Falsch: 2^{-1}	Falsch: 2^{-2}	Falsch: 2^3
b) Wahr	Wahr	Falsch: $\frac{1}{10^{13}}$
c) Falsch: $a \cdot b^2$	Wahr	Falsch: $a \cdot b^{-4}$

11 „minus 5 hoch 4"
Es müssen Klammern um die -5 gesetzt werden, also: $(-5)^4 = 625$

12 Begründen
a) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m$ (Rechenregel für das Potenzieren einer Potenz und Kommutativgesetz für Produkte)
b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{\frac{1}{n}}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$ (Rechenregel für n-te Wurzeln und Doppelbrüche)
c) $(a^{-n})^{\frac{1}{n}} = a^{-n \cdot \frac{1}{n}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ (Rechenregel für das Potenzieren einer Potenz)

34 **13** Ein anderer Definitionsversuch

a) Marie: $3^{-2} = -3^2 \rightarrow$ Potenzgesetz: $3^{-2} \cdot 3^{-2} = 3^{-2-2} = 3^{-4} \neq 3^4 = -3^2 \cdot (-3^2)$

Anna: $3^{-2} = -2 \cdot 3 \rightarrow$ Potenzgesetz: $3^{-2} \cdot 3^{-2} = 3^{-2-2} = 3^{-4} \neq 4 \cdot 3 = -2 \cdot 3 \cdot (-2 \cdot 3)$

b) Möchte man zur nächst kleineren Potenz kommen, also den Exponenten jeweils um 1 verringern, so muss jeweils einmal durch die Basis dividiert werden. Werden die Exponenten dann negativ, so erscheint die Basis im Nenner mit einem positiven Exponenten. Daher ist die Definition $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$ sinnvoll. (Siehe auch Basiswissen auf S. 20 im Buch)

14 Ein Vorschlag für 0^0

$1 = 0^0 = 0^{2-2} = \frac{0^2}{0^2} = \frac{0}{0}$ Die Division durch 0 ist nicht definiert.

35 **15** Schulden und Nullen

a) Da es sich um eine sehr große Summe handelt, ist die Rundung hier sinnvoll.

b) 2 264 667 000 000 : 81 000 000 ≈ 27 959 (in €) Schulden entfallen im Durchschnitt auf jeden Staatsbürger.

c) Dieser Fehler ist nicht klein. Der Unterschied zwischen 120 Milliarden und 12 Milliarden (bei einer 0 weniger) liegt bei 108 Milliarden. Es ist schwierig mit solchen Zahlen umzugehen, da diese im Alltag oft nicht ausgeschrieben werden, sondern in der Regel die Begriffe wie Millionen, Milliarden, usw. verwendet werden.

16 Biberbestand

Zuwachs des Biberbestandes: $B(t) = 8 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$ (t in Jahren) $\rightarrow B(30) = 512$.

Nach 30 Jahren beträgt der Biberbestand 512 Tiere.

17 Bakterienkultur

a)

15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00	22:00
790	1185	1778	2667	4000	6000	9000	13 500

b) Um 22:00 Uhr sind es $6000 \cdot 1{,}5^2$ Bakterien und um 17:00 Uhr sind es $6000 \cdot 1{,}5^{-3}$ Bakterien.

c) $6000 \cdot 1{,}5^{-8} \approx 234 > 100$. Um 12:00 Uhr gibt es schon mehr als 100 Bakterien.

18 Lichtgeschwindigkeit

a) $150\,000\,000\,000\,\text{m} : 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 500\,\text{s} \approx 8\,\text{min}$.

Ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde braucht circa 8 Min.

b) $1\ \text{Lichtjahr} = 3 \cdot 10^8 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 9{,}4608 \cdot 10^{15}\,\text{m} = 9{,}4608 \cdot 10^{12}\,\text{km}$

$8{,}611 \cdot (9{,}4608 \cdot 10^{12}\,\text{km}) \approx 8{,}15 \cdot 10^{13}\,\text{km}$

Der Stern Sirius ist von der Erde $8{,}15 \cdot 10^{13}\,\text{km}$ entfernt.

19 *Wellenlängen*

a) $0{,}000\,000\,000\,125\,\text{m} = 1{,}25 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$. Die Wellenlänge der Röntgenstrahlen sind kürzer als alle oben angegebenen.

b) Die Wellenlänge ist bei der Übertragung von Fernsehsignalen im Vergleich zur UV-Strahlung um das 10^9-fache größer.

Lösungen zu Kapitel 2

82 **1** *Kreisgrößen*

r	3 cm	1,59 cm	4,48 cm	9,3 m	7,16 dm	0,74 cm
U	18,85 cm	10 cm	28,14 cm	58,43 cm	45 dm	4,62 cm
A	28,27 cm²	7,94 cm²	63 cm²	271,72 m²	161,06 dm²	1,7 cm²

82 **2** *Flächeninhalt und Umfang von Figuren*

Die gefärbten Flächen der Abbildungen (3) und (5) haben den kleinsten Flächeninhalt mit $A = 1{,}93\,\text{cm}^2$.
Die gefärbte Fläche der Abbildung (1) hat den größten Flächeninhalt mit $A = 6{,}28\,\text{cm}^2$.
Die gefärbten Flächen der Abbildung (3) und (4) hat den kleinsten Umfang mit $U = 9{,}42\,\text{cm}$.
Die gefärbte Fläche der Abbildung (2) hat den größten Umfang mit $U = 13\,\text{cm}$.

3 *Kreis und Quadrat*

a) $a = 3{,}57\,\text{cm}$
b) $A_{\text{Quadrat}} = 100\,\text{cm}^2$; $A_{\text{Kreis}} = 127{,}32\,\text{cm}^2$. Der Flächeninhalt des Kreises ist um 27,32 % größer als der des Quadrates.

4 *Gleicher Umfang – unterschiedliche Flächeninhalte*

Das Dreieck besitzt einen Flächeninhalt von $249{,}42\,\text{cm}^2$, das Quadrat einen von $324\,\text{cm}^2$, das Sechseck einen von $374{,}12\,\text{cm}^2$ und der Kreis einen von $412{,}59\,\text{cm}^2$.

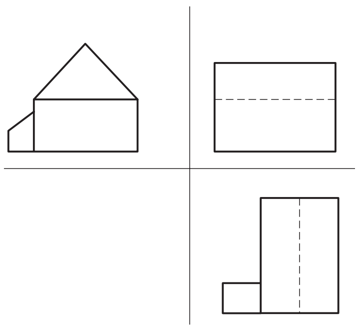
5 *Kreisring*

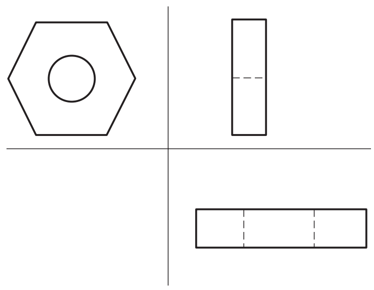
Der Ring ist 2 cm breit.
Es ist nicht möglich einen Ring mit dem angegebenen Flächeninhalt nach innen zu legen.

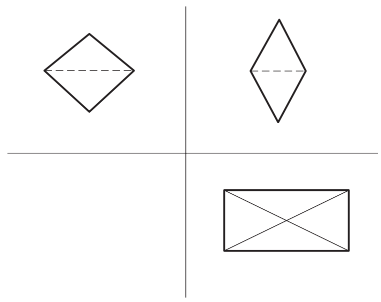
6 *Kreisfiguren*

(1) $U = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1{,}5\,\text{cm} + 8 \cdot 1{,}5\,\text{cm} = 16{,}71\,\text{cm}$; $A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1{,}5\,\text{cm})^2 = 3{,}53\,\text{cm}^2$
(2) $U = 2 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 1\,\text{cm} + 2 \cdot 2\,\text{cm} + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 2\,\text{cm} = 14{,}09\,\text{cm}$; $A = 3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} - 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot (2\,\text{cm})^2 = 6{,}91\,\text{cm}$
(3) $U = 2 \cdot 3\,\text{cm} + \frac{2}{15} \cdot 2\pi \cdot 8\,\text{cm} + \frac{2}{15} \cdot 2\pi \cdot 5\,\text{cm} = 16{,}89\,\text{cm}$; $A = \frac{2}{15} \cdot \left(\pi \cdot (8\,\text{cm})^2 - \pi \cdot (5\,\text{cm})^2\right) = 16{,}34\,\text{cm}^2$

7 *Grund-, Auf- und Seitenriss zeichnen*

a)


b)


c)


83 **8** *Gradmaß und Bogenmaß*

$\frac{2\pi}{3} = 120°$; $1{,}5\pi = 270°$; $0{,}3\pi = 54°$; $\frac{\pi}{12} = 15°$; $1{,}57 = 90°$; $\frac{10}{9}\pi = 200°$

9 *Zylindergrößen*

r	2 cm	3,5 cm	10 cm	7,4 cm	2,82 cm
h	4 cm	1,91 cm	1,2 cm	13,1 cm	5,64 cm
M	50,27 cm²	42 cm²	75,4 cm²	609 cm²	100 cm²
O	75,4 cm²	118,97 cm²	703,72 cm²	953,16 cm²	150 cm²
V	50,27 cm³	46,8 cm³	377 cm³	2253,64 cm³	140,91 cm³

10 *Volumen gesucht*

Volumen Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 396\,\text{cm}^2 \cdot 17\,\text{cm} = 2244\,\text{cm}^3$

Volumen Kegel: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 39\,\text{mm}^2 \cdot 22\,\text{mm} = 286\,\text{mm}^3$

Volumen Kegel: Fehlende Größen r und s berechnen

$G = \pi \cdot r^2 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = \sqrt{\frac{24\,\text{cm}^2}{\pi}} \approx 2{,}76\,\text{cm}$

$M = \pi \cdot r \cdot s \;\Rightarrow\; s = \frac{M}{\pi \cdot r} = \frac{190\,\text{cm}^2}{\pi \cdot 2{,}76\,\text{cm}} \approx 21{,}91\,\text{cm}$

Mithilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich für die Höhe h:

$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(21{,}91\,\text{cm})^2 - (2{,}76\,\text{cm})^2} \approx 21{,}74\,\text{cm}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 24\,\text{cm}^2 \cdot 21{,}74\,\text{cm} = 173{,}92\,\text{cm}^3$

83 **11** *Kleine Berechnungen*

a) Volumen Kerze: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16\,\text{cm}^2 \cdot 7{,}5\,\text{cm} = 40\,\text{cm}^3$

b) Oberfläche Heißluftballon: Wird der Heißluftballon als Kugel genähert, so ergibt sich für dessen Oberfläche $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, wobei $r^3 = \frac{3V}{4\pi}$. Es folgt $O = 4 \cdot \pi \cdot (6{,}31\,\text{m})^2 = 499{,}59\,\text{m}^2$

12 *Weitere Berechnungen*

a) Die Höhe der Eistüte berechnet sich aus $h_{Kegel} = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2} = \frac{3 \cdot 80\,\text{cm}^3}{\pi \cdot (2{,}5\,\text{cm})^2} = 12{,}22\,\text{cm}$.

b) Zuerst werden die fehlenden Größen aus der Grundfläche berechnet $r_{groß} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{1260\,\text{cm}^2}{\pi}} = 20{,}03\,\text{cm}$

$r_{klein} = r_{groß} - 5 = 15{,}03\,\text{cm}$

Die Höhe der Pylone berechnet sich zu $h_{Kegel} = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot {r_{klein}}^2} = \frac{3 \cdot 14\,200\,\text{cm}^3}{\pi \cdot (15{,}03\,\text{cm})^2} = 60{,}03\,\text{cm}$

13 *Fehlende Größen bestimmen*

a)

r	1 cm	10 cm	20 cm	6370 km	2 dm	0,6 m	2,9 dm	1 m	10 m
d	2 cm	20 cm	40 cm	12 740 km	4 dm	1,2 m	5,8 m	2 m	20 m
V	4,2 cm³	4188,8 cm³	33510,3 cm³	1 082 696 932 430 km²	31,4 l	1 m³	100 dm³	4,2 m³	4185,6 m³
O	12,6 cm²	1256,6 cm²	5026,5	509 904 363,8 km²	48,1 dm	4,8 m²	104,2 dm²	12,57 m²	1256 m²

b) Nein, hier sind jeweils zwei Werte nötig, um alle Angaben berechnen zu können.

14 *Wachsende Kreisringe*

$A = \pi\left(r_n^2 - r_{n-1}^2\right)$ mit r_n ist Radius des äußeren Kreisbogens und r_{n-1} ist Radius des inneren Kreises.

$r_n = n \cdot r$ und $r_{n-1} = (n-1) \cdot r$

Flächeninhalt des neunten Rings: $A = \pi\left((9\,r)^2 - (8\,r)^2\right)$

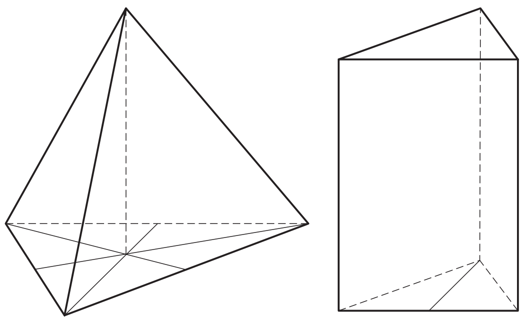
84 **15** *Was passiert mit dem Umfang oder Flächeninhalt eines Kreises, wenn …*

Für den Umfang muss der Radius halbiert (verdreifacht, verfünffacht) werden.
Für den Flächeninhalt muss der Radius verdoppelt (vervierfacht, die Wurzel aus a gezogen) werden.

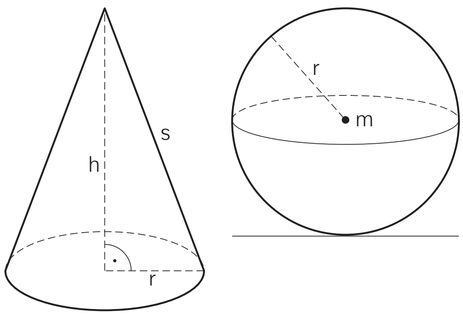
16 *Ansichten von geometrischen Körpern*

a) (1) es könnte sich um eine Pyramide oder ein Prisma handeln.
(2) Es könnte sich um eine Kugel oder einen Kegel handeln.
(3) Es könnte sich um ein Prisma handeln.

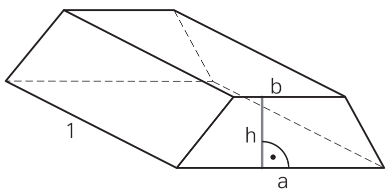
b) (1)



(2)



(3)



17 *Was passiert mit dem Volumen und der Mantelfläche, wenn …*

a) Das Volumen vervierfacht, die Mantelfläche verdoppelt sich.
b) Das Volumen verdoppelt, die Mantelfläche verdoppelt sich.
c) Das Volumen verachtfacht, die Mantelfläche vervierfacht sich.
d) Das Volumen verdoppelt sich, die Mantelfläche bleibt gleich.
e) Das Volumen halbiert sich, die Mantelfläche bleibt gleich.

MATHEMATIK NEUE WEGE, ISBN 978-3-507-88665-L, Schroedel

84

18 *Zylinder aus DIN-Formaten herstellen*

a) DIN-A4-Format: 21 cm × 29,7 cm
$A_M = 623{,}7\,cm^2$; $r = 4{,}73\,cm$; $V = 1476{,}02\,cm^3$
DIN-A5-Format: 14,8 cm × 21 cm
$A_M = 310{,}8\,cm^2$; $r = 3{,}34\,cm$; $V = 518{,}69\,cm^3$
Der DIN-A4-Zylinder umfasst nicht das doppelte Volumen des DIN-A5-Zylinders.

b) $V = 1476{,}02\,cm^3$ (mit $h = 21\,cm$) und $V = 1040{,}88\,cm^2$ (mit $h = 29{,}7\,cm$)

19 *Was passiert mit dem Volumen, wenn…*

a) Wird der Radius eines Kegels verdoppelt (verdreifacht), so vervierfacht (verneunfacht) sich das Volumen.
b) Wird die Höhe einer Pyramide verdoppelt (verdreifacht), so verdoppelt (verdreifacht) sich auch ihr Volumen.
c) Wird der Radius einer Kugel verdoppelt (verdreifacht), so verachtfacht (ver-27-facht) sich das Volumen.
d) Wir der Radius eines Zylinders halbiert (gedrittelt), so beträgt das Volumen nur noch ein Viertel (ein Neuntel) des ursprünglichen Volumens.

20 *Kugeln schmelzen*

Das Gesamtvolumen der acht kleinen Kugeln berechnet sich aus $V_{Kugeln} = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (22{,}5\,mm)^3 = 381\,704\,mm^3$
Der Radius der neuen Kugel mit gleichem Volumen ergibt sich aus $r_{Kugel} = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{381\,704\,mm^3 \cdot 3}{4 \cdot \pi}} = 45\,mm$.
Der Radius der großen Kugel ist also doppelt so groß wie der einer kleinen.
Nach Aufgabe 11 c) hätte man das auch ohne Rechnung sehen können.

85

21 *Pizza*

Kleine Pizza: $A = 380{,}13\,cm^2$ kostet 5 €.
Große Pizza: $A = 1520{,}53\,cm^2$, Stück: $A = 126{,}71\,cm^2$ kostet 2 €.
Drei Stücke der großen Pizza entsprechen einer kleinen Pizza. Das heißt die drei Stücke sind teurer, da sie insgesamt 6 € kosten, als die kleine Pizza, die bei gleicher Größe nur 5 € kostet.

22 *Defekte Scheibe*

$A_\alpha = \frac{\pi}{360°} \cdot 20° \cdot (1{,}5\ m)^2 = 0{,}39\ m^2$
$A_\alpha - \frac{\pi}{360°} \cdot 20° \cdot (1{,}5\ m - 0{,}47\ m)^2 = 0{,}208\ m^2$
Die neue Scheibe kostet 186,99 €.

23 *Eine Buche*

Zunächst berechnen wir durch Umstellung der Formel $U = 2\pi \cdot r$ die jeweiligen Radien des Stammes:
$r_1 = \frac{1{,}14\,m}{2\pi} = 18{,}1\,cm$; $r_2 = \frac{1{,}28\,m}{2\pi} = 20{,}4\,cm$. Es ist $d_1 = 2 \cdot r_1 = 36{,}2\,cm$; $r_2 = 2 \cdot r_2 = 40{,}8\,cm$,
also ist der Durchmesser des Stammes um etwa $\frac{40{,}8 - 36{,}2}{36{,}2} = \frac{4{,}6}{36{,}2} = 0{,}127 = 12{,}7\,\%$ gewachsen. Für die Querschnittsfläche des Stammes gilt: $A_1 = \pi r_1^2 = 1029\,cm^2$; $A_2 = \pi r_2^2 = 1307{,}41\,cm^2$, also ist diese um etwa 27 % gewachsen.

24 *Dosenvergleich*

a) Große Dose: $V = 852{,}35\ cm^3$; kleine Dose: $V = 427{,}51\ cm^3$
Die kleine Dose hat in etwa das halbe Volumen der größeren.
b) Große Dose: $O = 498{,}76\ cm^2$; kleine Dose: $O = 318{,}93\ cm^2$
Das Verhältnis von Durchmesser zur Höhe beträgt bei der großen Dose etwa 9 : 10 und bei der kleinen etwa 7 : 10.

25 Stadttor

$s = \sqrt{181{,}25}\,m \approx 13{,}46\,m$
Dachfläche eines Turms: $M \approx 211{,}47\,m^2$
Die Dachfläche beider Türme ist mit rund $420\,m^2$ etwa viermal so groß wie die eines durchschnittlichen Einfamilienhauses.

26 *Sandhaufen*

Zuerst muss das Volumen des Sandhaufens berechnet werden, um später daraus mithilfe der Dichte das Gewicht errechnen zu können:
$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (5\,m)^2 \cdot 3\,m = 78{,}54\,m^3$
$m_{Sandhaufen} = \rho \cdot V = 2{,}2\,\frac{t}{m^3} \cdot 78{,}54\,m^3 = 172{,}788\,t$
Die Anzahl der Fahrten ergibt sich aus: $\frac{172{,}788\,t}{18\,t} = 9{,}6$
Der LKW muss zehn Mal fahren.

85 **27** *Werkstücke*

a) Der Gesamtkörper kann in einen Zylinder und eine Halbkugel zerlegt werden.

$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (10{,}5\,mm)^3 \approx 2424{,}52\,mm^3$

$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (24\,mm)^2 \cdot 19\,mm \approx 34\,381{,}59\,mm^3$

Das Gesamtvolumen beträgt dann 36 806,11 mm^3.

$O_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (21\,mm)^2 \approx 692{,}72\,mm^2$

$O_{Kreisfläche} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (10{,}5\,mm)^2 \approx 346{,}36\,mm^2$

$O_{Zylinder} = 2\,G + M = 2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,h = 2\,\pi \cdot (24\,mm)^2 + 2\,\pi \cdot 24\,mm \cdot 19\,mm \approx 6484{,}25\,mm^2$

Die Gesamtoberfläche beträgt dann – unter Berücksichtigung der Verdeckung der oberen Grundfläche durch die Halbkugel – $692{,}72\,mm^2 + 6484{,}25\,mm^2 - 346{,}36\,mm^2 = 6830{,}61\,mm^2$.

b) Man erhält den Körper, indem man aus dem Würfel eine Halbkugel ausschneidet.

$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (10{,}5\,mm)^3 \approx 2424{,}52\,mm^3$

$V_{Würfel} = a^3 = (21\,mm)^3 = 9261\,mm^3$

Das Gesamtvolumen beträgt dann $9261\,mm^3 - 2424{,}52\,mm^3 = 6836{,}48\,mm^3$.

$O_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (21\,mm)^2 \approx 692{,}72\,mm^2$

$O_{Kreisfläche} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (10{,}5\,mm)^2 \approx 346{,}36\,mm^2$

$O_{Würfel} = 6\,a^2 = 6\,(21\,mm)^2 = 2646\,mm^2$

Die Gesamtoberfläche beträgt dann $2646\,mm^2 + 692{,}72\,mm^2 - 346{,}36\,mm^2 = 2992{,}36\,mm^2$

c) Man erhält den Körper, indem man aus einer Halbkugel eine etwas kleinere Halbkugel ausschneidet.

$V_{große\ Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (14{,}5\,mm)^3 \approx 6385{,}03\,mm^3$

$V_{kleine\ Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (12{,}5\,mm)^3 \approx 4090{,}62\,mm^3$

Das Gesamtvolumen beträgt dann $6385{,}03\,mm^3 - 4090{,}62\,mm^3 = 2294{,}41\,mm^3$

$O_{große\ Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (29\,mm)^2 \approx 1321{,}04\,mm^2$

$O_{Kreisfläche\,gr} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (14{,}5\,mm)^2 \approx 660{,}52\,mm^2$

$O_{Kreisfläche\,kl} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (12{,}5\,mm)^2 \approx 490{,}87\,mm^2$

$O_{kleine\ Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (25\,mm)^2 \approx 981{,}75\,mm^2$

Das Gesamtvolumen beträgt dann $1321{,}04\,mm^2 + 981{,}75\,mm^2 + 660{,}52\,mm^2 - 490{,}87\,mm^2 = 2472{,}44\,mm^2$.

Lösungen zu Kapitel 3

114 **1** *Gleichungen mit mehreren Lösungen*

a) $\sin(\alpha) = 0$ für $\alpha = 0°, 180°, 360°$; $\sin(\alpha) = 0{,}5$ für $\alpha = 30°, 150°$; $\sin(\alpha) = -0{,}5$ für $\alpha = 210°, 330°$; $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ für $\alpha = 60°, 120°$; $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ für $\alpha = 240°, 300°$

b) $\sin(\alpha) = 0$ für $\alpha = 0°, -180°, -360°$; $\sin(\alpha) = 0{,}5$ für $\alpha = -210°, -330°$; $\sin(\alpha) = -0{,}5$ für $\alpha = -30°, -150°$; $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ für $\alpha = -240°, -300°$; $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ für $\alpha = -60°, -120°$

2 *Punkt auf Kreis*

a) $C\left(\cos(\alpha)\,|\,\sin(\alpha)\right)$

b) $C\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $P(4\,|\,5)$ liegt auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 41$. Der Winkel α beträgt 51,34°.

3 *Winkel gesucht*

a) $0° < \alpha < 90°$ b) $270° < \alpha < 360°$ c) $\alpha = 90°$ d) keine Lösung für α

4 *Drei Steckbriefe*

(1) $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ (2) $f(x) = 3\sin(0{,}5\,x) - 1$ (3) $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

5 *Klar ohne Taschenrechner*

$\cos(0°) = 1$

$\sin(43°) - \cos(47°) = 0$, da $\sin(43°) = \cos(90° - 43°) = \cos(47°)$

$\sin^{-1}(0{,}5) = 30$, denn $\sin(30°) = 0{,}5$

$\sin(45°) + \cos(45°) = \sqrt{2}$, da $\sin(45°) = \cos(45°) = 0{,}5\sqrt{2} + 0{,}5\sqrt{2} = \sqrt{2}$

6 *Der Graph der Sinusfunktion*

Die Sinusfunktion verläuft durch den Ursprung. Die Kurve steigt auf ein Maximum von 1 für den Winkel $\alpha = 90°$ an. Die Werte der Sinusfunktion ändern sich für die Winkelgrößen $0° \le \alpha \le 45°$ schnell, für $45° \le \alpha \le 90°$ eher langsam. So steigt der Graph anfangs steiler an und flacht daraufhin etwas ab.
Wird der Graph der Sinusfunktion in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt, in das man auf die x-Achse die Winkel α in deg und auf der y-Achse die entsprechenden Funktionswerte einträgt, so erkennt man den Zusammenhang zum Einheitskreis. Bewegt man nämlich einen Punkt P auf dem Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn und trägt man zu jedem Drehwinkel α die y-Koordinate des Punktes P in das Koordinatensystem ein, erhält man den Graphen der Sinusfunktion.

7 *Aus einem Aufnahmetest*

a) Wahr, denn $\sin(90°) = 1 < 0 = \sin(0°)$.
b) Falsch, denn $\sin(90°) = 1 > -1 = \sin(180°)$.
c) Falsch, denn $\sin(90°) = 1 > -1 = \sin(270°)$.
d) Wahr, denn der Wertebereich der Sinusfunktion ist $[-1, 1]$ für $0° \le \alpha \le 360°$.
e) Wahr, denn $\sin(45°) = \cos(45°) = 0{,}5\sqrt{2}$ und $\sin(225°) = \cos(225°) = -0{,}5\sqrt{2}$

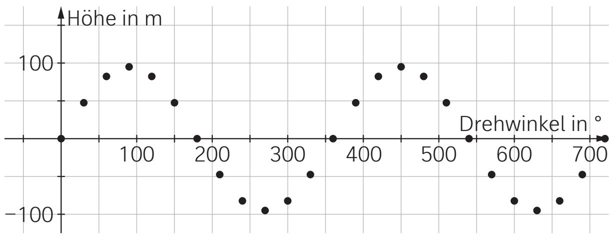
115 **8** *New York Wheel*

a) A(95|0), B(0|95), C(−95|0) und D(0|−95)

b)

Drehwinkel in °	Höhe in m
0	0,0
30	47,5
60	82,3
90	95,0
120	82,3
150	47,5
180	0,0
210	−47,5
240	−82,3
270	−95,0
300	−82,3
330	−47,5
360	0,0

Drehwinkel in °	Höhe in m
360	0,0
390	47,5
420	82,3
450	95,0
480	82,3
510	47,5
540	0,0
570	−47,5
600	−82,3
630	−95,0
660	−82,3
690	−47,5
720	0,0

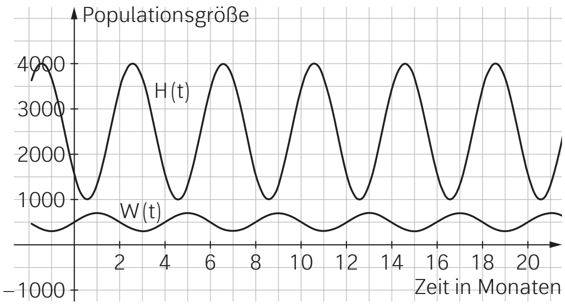


c) Das Wheel kann durch einen Kreis mit Radius 95 m beschrieben werden. Die Kapsel P bewegt sich dann auf der Kreislinie, die Höhe wird durch die y-Koordinate des Wanderpunktes angegeben. Die Zuordnung *Drehwinkel → Höhe der Kapsel* ist eine in y-Richtung gestreckte Sinusfunktion: $y = 95 \cdot \sin(x)$.

9 *Räuber und Beute*

a) Hasen: Maximum: 4000, Minimum: 1000, Periode: 4 Monate; Wölfe: Maximum: 700, Minimum: 300, Periode: 4 Monate.
Das Maximum (Minimum) der Hasen tritt zum Zeitpunkt $t = 1 + \frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ ein und das der Wölfe zum Zeitpunkt $t = 1$ (3). Daran kann man ablesen, dass die Funktionen um $\frac{\pi}{2}$ zueinander verschoben sind.

115 9 b)



Es gibt generell über den gesamten Zeitraum immer mehr Hasen als Wölfe.
Sinkt die Anzahl der Wölfe, so steigt die Anzahl der Hasen. Vergrößert sich daraufhin die Wolfspopulation, so sinkt die Anzahl der Hasen.

10 *Ein Federpendel*

a) Mit trigonometrischer Regression ergibt sich: $f(x) = 5\sin(1{,}585x + 0{,}072) - 0{,}034$

b) (1) D. h. die Periodenlänge muss verdoppelt werden: $f(x) = 5\sin(1{,}585 \cdot 0{,}5x + 0{,}072) - 0{,}034$.
(2) D. h. die Amplitude muss verdoppelt werden: $f(x) = 10\sin(1{,}585x + 0{,}072) - 0{,}034$.
(3) D. h. die Funktion muss um 3 Einheiten nach rechts verschoben werden: $f(x) = 5\sin(1{,}585x - 4{,}585) - 0{,}034$

Lösungen zu Kapitel 4

168 1 *Exponentialfunktion oder nicht?*

Bis auf (A) sind alle Funktionen Exponentialfunktionen; bei (A) handelt es sich um eine kubische Funktion.

2 *Exponentielles Wachstum oder Abnahme*

Exponentielles Wachstum: $f(x) = 5^x$
Exponentielle Abnahme: $f(x) = 5^{-x}$

3 *Exponentialfunktion bestimmen*

a)

x	0	1	2	3	4	8
f(x)	3	12	48	192	768	196 608

b) $f(x) = 3 \cdot 4^x$
Diese Gleichung lässt sich leicht durch Einsetzen der Tabellenwerte in den allgemeinen Ansatz $f(x) = a \cdot b^x$ ermitteln.

4 *Wachstums- und Zerfallsprozesse*

Anfangsbestand A = f(0)	Wachstum/Zerfall pro Stunde	Wachstumsfaktor b	Wachstumsfaktor in %	Formel f(x)	Bestand nach 3 Stunden	Bestand nach 10 Stunden
80	Verdreifachung	3	300	$80 \cdot 3^x$	2160	4 723 920
120	Zunahme um je drei Zehntel	1,3	130	$120 \cdot 1{,}3^x$	159,6	1654,30
90	20 dazu	–	–	$90 + 20 \cdot x$	150	290
100	Abnahme um je 10 %	0,9	90	$f(x) = 100 \cdot 0{,}9^x$	72,9	34,87
150	6 weniger	–	–	$150 - 6 \cdot x$	132	90
40 000	Halbierung	0,5	50	$40\,000 \cdot 0.5^x$	5000	39,0625
1	2 dazu	–	–	$1 + 2 \cdot x$	7	21
1000	Zunahme um je ein Viertel	1,25	125	$1000 \cdot 1{,}25^x$	1953,13	9313,23
1 000 000	Reduzierung auf ein Drittel	1/3	33,33	$1\,000\,000 \cdot 0{,}33^x$	35937	15,16

168

5 *Wachstum - iterativ*

a) $f(1) = 22{,}4$; $f(2) = 37{,}92$; $f(3) = 50{,}34$; für große Werte von n nähert sich die Funktion dem Wert 100 an, es handelt sich also um begrenztes Wachstum.
b) $f(1) = 2080$; $f(2) = 2163{,}2$; $f(3) = 2249{,}73$; die Funktion wächst exponentiell.
c) $f(1) = 200$; $f(2) = 20000$; $f(3) = 2 \cdot 10^8$; die Funktion wächst exponentiell.
d) $f(1) = 70$; $f(2) = 49$; $f(3) = 34{,}3$; die Funktion fällt exponentiell.
e) $f(1) = 175$; $f(2) = 156{,}25$; $f(3) = 142{,}19$; die Funktion fällt exponentiell und nähert sich dabei dem Wert 100 an.
f) $f(1) = 45$; $f(2) = 27{,}5$; $f(3) = 36{,}25$; die Funktion hat einen alternierenden Verlauf und nähert sich dem Wert $\frac{100}{3}$ an.

6 *Exponentialfunktionen aus Punkten bestimmen*

Einsetzen liefert:

a) $a = 8$, $b = \frac{5^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}}$
b) $\frac{a}{b} = 10$, $1 = a \cdot b^{10}$, also $a = 10^{\frac{10}{11}}$, $b = \frac{1}{10^{\frac{1}{11}}}$
c) $a + c = 5$, $1{,}5a + c = 2$, also $a = -6$, $c = 11$
d) $c = 8$, $2b^3 + 8 = 20$, also $b = 6^{\frac{1}{3}}$

169

7 *Funktionen identifizieren*

1. Graph: (C) 2. Graph: (A) 3. Graph: (D) 4. Graph: (B)

8 *Logarithmen per Hand*

a) $\log_2 16 = 4$ b) $\log_{10} 1000000 = 6$ c) $\log_{10} 0{,}000001 = -6$ d) $\log_5 625 = 4$

9 *Logarithmen und ihre Bedeutung*

a) $2^x = 10$ b) $5^x = 5$ c) $10^x = 10$ d) $0{,}9^x = 2$

10 *Unbekannte x gesucht*

a) $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow 5^2 = x = 25$
b) $\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$
c) $\log_x 216 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 216 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{216} = 6$
d) $\log_{0,5} 16 = x = \frac{\lg 16}{\lg 0{,}5} = -4$

11 *Logarithmen berechnen*

a) $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$
b) $\frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 10} = \frac{2}{1} = 2$
c) $\frac{\log_3 9}{\log_2 8} = \frac{2}{3}$
d) $\log_b b^{10} - \log_b 1 = 10 - 0 = 10$

12 *Exponentialgleichungen lösen*

a) $1{,}04^x = 2 \Leftrightarrow \log_{1,04} 2 = x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}04} \approx 17{,}67$
b) $4 \cdot 1{,}8^x = 2 \Leftrightarrow 1{,}8^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{1,8} \frac{1}{2} = x = \frac{\lg \frac{1}{2}}{\lg 1{,}8} \approx -1{,}18$
c) $50 - 40 \cdot 0{,}9^x = 40 \Leftrightarrow 0{,}9^x = \frac{-1}{50} \Leftrightarrow \log_{0,9}\left(\frac{-1}{50}\right) = x$
Da der Logarithmus für negative Logarithmanden nicht definiert ist, hat diese Gleichung keine Lösung.
d) Die Gleichung $10 + 30 \cdot 0{,}7^x = 0$ hat ebenfalls keine Lösung, siehe Argumentation unter c).

13 *Gleichungen lösen mit Logarithmen*

a) $5{,}6 \cdot 1{,}12^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_{1,12}\left(\frac{10}{5{,}6}\right) = \frac{\lg\left(\frac{10}{5{,}6}\right)}{\lg 1{,}12} \approx 5{,}12$
d) $10 \cdot 1{,}5^x = 1 \Leftrightarrow x = \log_{1,5}\left(\frac{1}{10}\right) \approx -5{,}68$
b) $4{,}3 \cdot 1{,}05^x = 20 \Leftrightarrow x = \log_{1,05}\left(\frac{20}{4{,}3}\right) \approx 31{,}50$
e) $45 - 40 \cdot 0{,}9^x = 20 \Leftrightarrow x = \log_{0,9}\left(\frac{20-45}{-40}\right) \approx 4{,}46$
c) $5 \cdot 0{,}89^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{0,89}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 7{,}86$
f) $10 \cdot 1{,}3^{(4x)} = 100 \Leftrightarrow x = 0{,}25 \cdot \log_{1,3} 10 \approx 2{,}19$

14 *Untersuchung von Tabellen*

a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$ b) $f(x) = 3 \cdot x + 2$ c) $f(x) = x^2 + 2$ d) $f(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$ e) $f(x) = \log_5(x)$ f) $f(x) = \frac{10}{x}$

170

15 *Erstaunliches exponentielles Wachstum*

Das Wachstum gehorcht der Gleichung $f(x) = 1000000 \cdot (1 + 0{,}01)^x$. Dies formt sich um zu $x = \log_{(1+0,01)^x}\left(\frac{f(x)}{1000000}\right)$.
Damit erhält man folgende Werte:

Anzahl	Zeit (Jahre)
1000000	0
2000000	69,7
3000000	110,4
4000000	139,3

170 **16** *Wachstumsmodelle erkennen*

Im Folgenden sei angenommen, dass nur die Betrachtung von $x \in [0; \infty]$ sinnvoll ist, da in der Regel in der Anwendung (Wachstums- und Zerfallsprozesse) x die Zeit bezeichnet. Soweit nicht anders angegeben, strebt die Funktion für negative x gegen $+/-\infty$.

a) Exponentielles Wachstum (weil Basis kleiner als 1, aber negativer Vorfaktor) von $f(0) = 45$ bis $f(\infty) = 75$.
b) Exponentielle Abnahme (weil Basis kleiner als 1 mit positivem Vorfaktor) von $f(0) = 105$ bis $f(\infty) = 75$.
c) Exponentieller Zerfall (weil Basis größer als 1, aber negativer Vorfaktor) von $f(0) = 45$ bis $f(\infty) = -\infty$.
(Für negative x strebt die Funktion gegen 75.)
d) Exponentieller Anstieg (weil Basis größer als 1 mit positivem Vorzeichen) von $f(0) = 105$ bis $f(\infty) = \infty$.
(Für unendliche negative x strebt die Funktion gegen 75.)
e) Exponentielles Wachstum (weil Basis größer als 1 mit negativem Vorzeichen, aber negativer Exponent) von $f(0) = 45$ bis $f(\infty) = 75$.
f) Wie e).

17 *Überraschende Zusammenhänge*

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
2^{-x}	16	8	4	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Es gilt $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Mit $g(x) := 2^{-x}$ und $f(x) := 2^x$ ist $f(-x) = g(x)$, folglich handelt sich bei der Funktion 2^{-x} um die Spiegelung von 2^x an der y-Achse.

18 *Fragen*

(1) Für $f(x) = a \cdot b^x$ gilt $f(0) = a \cdot b^0 = a \cdot 1 = a$, also müsste im Falle $f(0) = 0$ auch $a = 0$ gelten.
Es handelt sich dann um die Nullfunktion.
(2) Streng genommen berühren sie die Koordinatenachsen nie. Man kann aber sagen: Sie berühren sie im Unendlichen.
(3) Die Iteration wird sich fallend dem Wert 1 annähern, da die Wurzelfunktion sich im Punkt P(1|1) mit der Winkelhalbierenden schneidet.
(4) Es ist $\log_b(b^n) = n$, jedoch $\left(\log_b(b)\right)^n = 1^n = 1$; die Aussage ist also falsch.
Sei $b^x = a$, dann ist $x = \log_b(a)$, also $\log_b(a) + \log_b(a) = 2x$, außerdem ist $b^{2x} = (b^x)^2 = a^2$, und somit die Aussage korrekt.

19 *Asymptote*

a) Die Funktion schmiegt sich für zunehmende positive x immer mehr der x-Achse an; folglich ist diese die Asymptote: $0{,}9^x$ wird für zunehmende x immer kleiner, verschwindet aber niemals.
b) $f(x) = 20 \mp 0{,}8^x$

20 *Verschiebung – Streckung*

a) Wegen $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ ist der Graph gegenüber dem für 2^x mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt.
b) siehe a)
c) siehe a)

21 *Steiler geht immer*

Der Graph verläuft durch (1|4) für $r = 2$ und durch (1|100) für $r \approx 6{,}64$.

171 **22** *Radioaktiver Zerfall*

Allgemein ist $f(t) = 100\,\text{mg} \cdot e^{-a \cdot t}$, t in Tagen, [Tag] = d, und $50\,\text{mg} = 100\,\text{mg} \cdot e^{-a \cdot 138\,\text{d}}$.
Dies liefert für $a \approx 0{,}005\,\frac{1}{\text{d}}$ und damit $f(60) \approx 74{,}08\,\text{mg}$.

23 *Wertverlust*

a) Es bezeichne $W(t)$ den Warenwert zum Zeitpunkt t in Jahren, [Jahr] = a, und W_0 den Anfangswert beim Kauf, dann ist $W(t) = W_0 \cdot 1{,}15^{-b \cdot t}$ mit noch zu ermittelndem b.
Laut Aufgabe ist $0{,}85 \cdot W_0 = W_0 \cdot 1{,}15^{-a}$, was auf $b = -\log_{1,15}(0{,}85) \approx 1{,}16$ führt.
Mit $\frac{W_0}{2} = W_0 \cdot 1{,}15^{-1{,}16 \cdot t_{\frac{1}{2}}}$ findet man $t_{\frac{1}{2}} \approx 4{,}28\,\text{a}$.
b) $W(10\,\text{a}) \approx 0{,}20 \cdot W_0$

24 *Besondere Sparpläne*

Die Sparkonten würden sich in den drei Varianten jeweils unterschiedlich entwickeln: A gehorcht linearem Wachstum, B ist ein Wachstum gemäß der Zinseszinsformel und C basiert auf einer geometrischen Reihe:

Woche	Variante A	Variante B	Variante C
1	54	48	40,5
2	68	57,6	41,5
3	82	69,12	43,5
4	96	82,94	47,5
5	110	99,53	53,5
6	124	119,54	69,5
7	138	143,33	101,5
8	152	171,99	165,5
9	166	206,39	293,5
10	170	247,67	549,5
11	194	297,20	1061,5
12	208	356,64	2085,5

171 **25** *"Selbstreinigungsmodell"*

a) Das Modell passt zu den Annahmen (Nachprüfen durch Einsetzen).

b) Es ist vermutlich nicht realistisch, anzunehmen, dass sowohl der Zufluss der Düngemittel als auch der Abbau jährlich in gleichem Maße stattfindet.

c) (1) $m_2(t) = 50 - 50 \cdot 0{,}5^t$

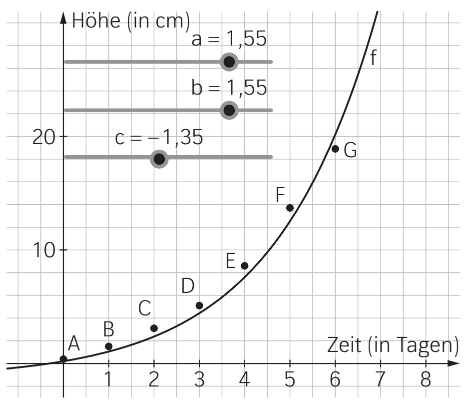
(2) $m_3(t) = 40 - 40 \cdot 0{,}3^t$

Im ersten Falle wird sich die Düngemittelkonzentration langfristig der 40 annähern, im zweiten der 50 und im dritten wieder der 40.

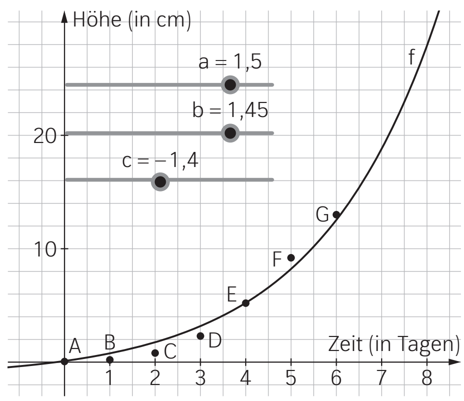
26 *Pflanzenwachstum*

a) In den folgenden Diagrammen sind stets die jeweiligen Daten graphisch dargestellt. Mit Schiebereglern wurden die passenden exponentiellen Modelle der Form $f(x) = a \cdot b^x + c$ bestimmt. Die Koeffizienten sind in den jeweiligen Graphen abzulesen.

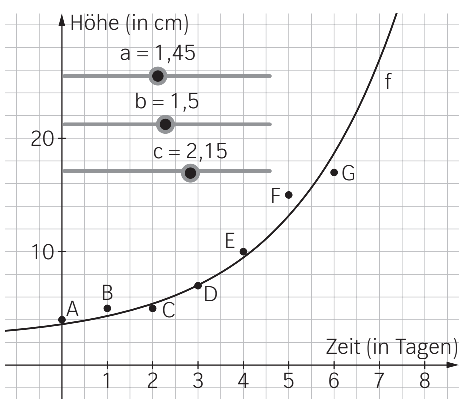
(1) Prunkbohne



(2) Weizen



(3) Borretsch



b) Die Werte in den jeweils berechneten Modellen stimmen nicht mit den nach 14 Tagen gemessenen Daten überein. Tatsächlich handelt es sich also um beschränktes exponentielles Wachstum.