Elemente der Mathematik

Vertiefungsfach Einführungsphase

Teil 1

(ISBN: 978-3-507-87100-7)

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Schroedel

1 Lineare Funktionen und Gleichungen

1.1 Lineare Terme und Gleichungen

1.1.2 Aufstellen und Vereinfachen von Termen

Seite 9

1. a) $4x + 9y$ **b)** $8 + 92y$ **c)** $21b$ **d)** $-2x$ **e)** $-2y$ **f)** $16r + 3$ **g)** $-11s + 5$ **h)** $11 - 3x$ **i)** $2a - 4b - 7c$ **j)** $21s - 24t$ **k)** $30 + 68y$ **l)** $b + 5$ **m)** $4a + 2$ **n)** $3b$ **o)** $-2 + f + 2g$

2. a) $2y - 5x + 8x = 3x + 2y$ **b)** $-4x + 7 + 5x = x + 7$ **c)** $-28 + 4a - 12 = 4a - 40$
d) $7u - 3w - w = 7u - 4w$ **e)** $-2v - v + 9 = -3v + 9$ **f)** $4a - a + b + b = 3a + 2b$

3. a) $2x^2 + 3x$ **b)** $3y^2 + 4y$ **c)** $2x^2 + 4x$ **d)** $3ab + 2a$ **e)** $9x^2 + 2x$ **f)** $2ab + 2a$ **g)** 0 **h)** $11uv + 3u - v$

4. a) $2x + 2y - 4$ **b)** $2x + 2y - 4$ **c)** $x + 2y - 7$ **d)** $x + 2y - 10$

Seite 10

5. a) $4 \cdot x + 4 \cdot 3x + 4 \cdot 2x = 24x$ **b)** $4 \cdot b + 4 \cdot 4a + 4 \cdot 3a = 28a + 4b$

6. a) $10x + 3 - 9x - 2 = x + 1$ **b)** $x + 2x + 10 - 5 - 3x = 5$
c) $x - 25 + 2x - 25 + 5x = 8x - 50$ **d)** $x - x^2 - 2x + 12 + x^2 = -x + 12$

7. a) Denk dir eine Zahl, ziehe 5 ab und addiere das dreifache der gedachten Zahl.
b) Denk dir eine Zahl und verdreifache sie. Dann addiere 2, subtrahiere die Zahl wieder, subtrahiere 3 und ziehe schließlich das Doppelte der gedachten Zahl ab.
c) Multipliziere eine gedachte Zahl mit sich selbst, addiere 5 und die gedachte Zahl; dann subtrahiere 4 und ziehe das Quadrat der Zahl wieder ab.

8. m soll jeweils die Zahl der angefangenen Gesprächsminuten bezeichnen, s die Zahl der SMS:
a) $36m + 15s = 8{,}76$ € **b)** $78m + 23s = 17{,}08$ € **c)** $9m + 16s = 4{,}64$ € **d)** $52m + 78s = 23{,}92$ € **e)** $87m + 104s = 34{,}72$ €

9. Richtig muss es jeweils lauten:
A: $4{,}80 + 0{,}29m$ **B:** $0{,}43m + 0{,}21s$
C: $0{,}98 + 0{,}39(m - 30)$ für $m \geq 30$; andernfalls nur 0,98,
wobei m die Zahl der Minuten und s die Zahl der SMS bezeichnet.

Seite 11

10. Der Flüssigkeitsstand nach 4 h, 7 h, 10 h, 15 h beträgt 11,8 cm, 9,4 cm, 7 cm bzw. 3 cm. Der gesuchte Term lautet $15 - 0{,}8\,t$, sofern $t \leq 18$ h 45 min gilt.
Andernfalls ist er 0 cm.

11. s gibt dabei die Zahl der Seiten an.
a) 16,86 €; 18,58 €; 20,30 €; 23,74 €; 42,66 €. Der Term lautet $9{,}98 + 0{,}43s$.
b) 22,80 €; 25,28 €; 27,76 €; 32,72 €; 60,00 €. Der Term lautet $22{,}80 + 0{,}62 \cdot (s - 16)$ für $s \geq 16$.
c) 24,98 €; 28,10 €; 31,22 €; 37,46 €; 71,78 €. Der Term lautet $24{,}98 + 0{,}78 \cdot (s - 16)$ für $s \geq 16$.

12. a) $-3x + 6$ **b)** $10u - 70$ **c)** $-20 + 10x$ **d)** $-12a + 6$ **e)** $-4 + 2b$ **f)** $-4v + w$ **g)** $-2{,}5z - 10$ **h)** $18 - 12c$ **i)** $1 + d$ **j)** $-xz - yz$ **k)** $ab - 3a$ **l)** $15xy - 3xz$ **m)** $x^2 + 1{,}7x$ **n)** $b - b^2$ **o)** $4xy - 12xz$

13. a) $14x + 11$ **b)** $10x + 15$ **c)** $6y - 43$ **d)** $-31b + 5c$ **e)** $-8x + 9y$ **f)** $-10u - 17$ **g)** $-10u - 17$ **h)** $-14b + 25$ **i)** $50x - 61$ **j)** $2ay$ **k)** $4g$ **l)** $x - 22$ **m)** $10ab - 3b$ **n)** $14y^2 - 14y$ **o)** $3ax - 5ay$

14. a) $5(x - 1) + x = 5x - 5 + x = 6x - 5$
b) $-3(t + 12) + t = -3t - 36 + t = -2t - 36$
c) $24y - (y + 7) \cdot 3 = 24y - 3y - 21 = 21y - 21$

15. a) $2 \cdot (3a + 4a + 5a) + 3 \cdot (a + 2) = 2 \cdot 12a + 3a + 6 = 27a + 6$
b) $a + (a + 2) + (a + 3) + 3(a + 4) = 6a + 17$

Seite 12

16. a) $3(x+y)$ **b)** $3(2-a)$ **c)** $-3(5x-1)$ **d)** $a(b+3)$ **e)** $4(1-x)$ **f)** $-2y(x+4)$

17. a) $4(z+y)$ **c)** $6(x+4y)$ **e)** $8(1+4b)$ **g)** $x(1-y)$ **i)** $11v(3-7u)$
b) $17(a-p)$ **d)** $13(2d-3)$ **f)** $b(a+2)$ **h)** $25k(h+4)$ **j)** $4z(9y+4)$

1.1.3 Lineare Gleichungen

Seite 13

1. a) $x=5$ **b)** $x=-3$ **c)** $x=-2$ **d)** $x=6$ **e)** $x=2$ **f)** $x=4$ **g)** $x=0{,}5$ **h)** $x=0$

2. a) $x=2$ **c)** $x=2{,}13$ **e)** $x=0$ **g)** $b=0{,}1$ **i)** $w=5$ **k)** $x=16$
b) $x=4$ **d)** $w=1$ **f)** $x=0$ **h)** $y=0{,}5$ **j)** $v=0$ **l)** $t=18$

3. a) $2{,}5x=4{,}5 \mid :2{,}5$
$x=1{,}8$

b) $5x=4x \mid -4x$
$x=0$

c) $2x=3{,}6+0{,}8x \mid -0{,}8x$
$1{,}2x=3{,}6 \quad \mid :1{,}2$
$x=3$

4. a) $2x-3=x+4$
$x=7$
Die gesuchte Zahl ist 7.

b) $4x+5=3x-4$
$x=-9$
Die gesuchte Zahl ist –9.

Seite 14

5. –

6. a) $L=\{\ \}$ **b)** $L=\{\ \}$ **c)** $L=\{0\}$ **d)** $L=\mathbb{R}$ **e)** $L=\{\ \}$ **f)** $L=\{\ \}$

7. a) $L=\{7\}$ **c)** $L=\{0{,}5\}$ **e)** $L=\left\{-\frac{2}{9}\right\}$ **g)** $\left\{\frac{29}{6}\right\}$ **i)** $L=\left\{-\frac{37}{3}\right\}$
b) $L=\{-1\}$ **d)** $L=\{3\}$ **f)** $L=\left\{\frac{1}{14}\right\}$ **h)** $L=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

8. $\frac{7}{4}x=1\,500$; $L=\{600\}$. Der Mittelteil wiegt 600 g.

9. FLATone: $0{,}99+0{,}28\cdot x=1-\ 5$; $x\approx 50{,}04$. Man kann 50 Gespräche führen.
FLATbonus: $1{,}99+0{,}38\cdot(x-10)=15$; $x\approx 44{,}24$. Man kann 44 Gespräche führen.

Seite 15

10. Die Gleichung lautet zusammengefasst $15x=54$; $L=\{3{,}6\}$. Die kürzeste Seite des Fünfecks ist 3,6 cm lang, die anderen Seiten entsprechend 7,2 cm, 10,8 cm, 14,4 cm und 18 cm.

11. Die Gleichung lautet zusammengefasst $4x+9=19$; $L=\{2{,}5\}$. Die kürzeste Seite des Vierecks ist 2,5 cm lang, die anderen 4,5 cm, 5,5 cm und 6,5 cm.

12. Die Gleichung lautet $5p-50=150+3p$; $L=\{100\}$. Ein Pferd ist 100 Rupien wert.

1.2 Lineare Funktionen

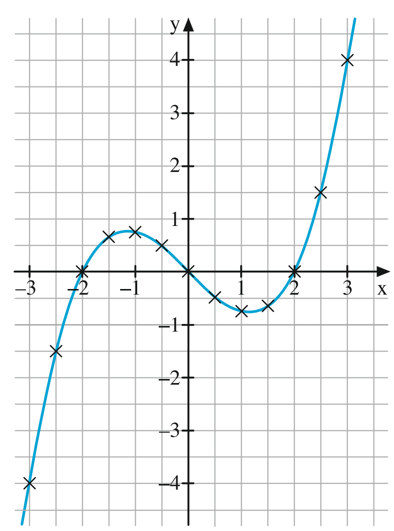
1.2.2 Lineare Funktionen – Term und Graph

Seite 19

1. Alle y-Werte sind auf Hundertstel gerundet:

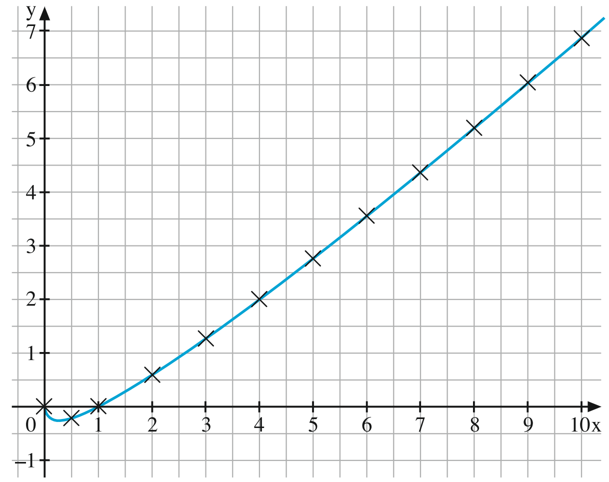
a)

x	y
–3,0	–3,75
–2,5	–1,41
–2,0	0
–1,5	0,66
–1,0	0,75
–0,5	0,47
0	0
0,5	–0,47
1,0	–0,75
1,5	–0,66
2,0	0
2,5	1,41
3,0	3,75



b)

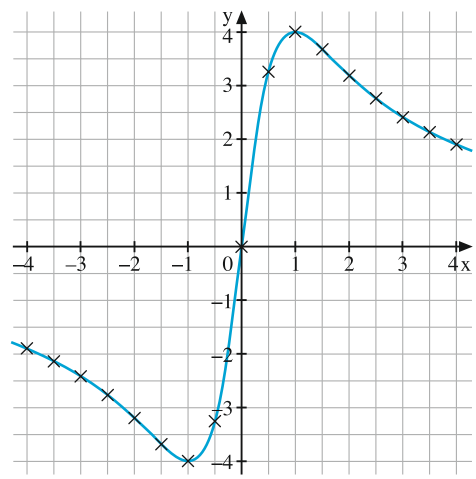
x	y
0	0
0,5	–0,21
1	0
2	0,59
3	1,27
4	2
5	2,76
6	3,55
7	4,35
8	5,17
9	6
10	6,84



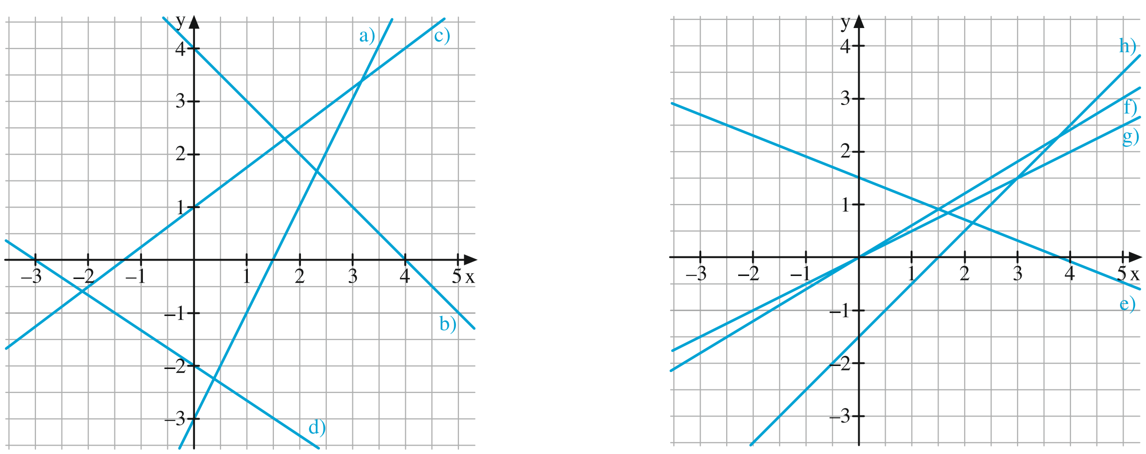
c)

x	y
–4,0	–1,88
–3,5	–2,11
–3,0	–2,40
–2,5	–2,76
–2,0	–3,2
–1,5	–3,69
–1,0	–4
–0,5	–3,2
0	0

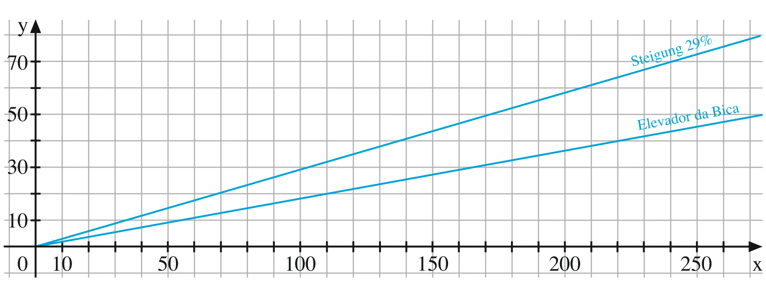
x	y
0,5	3,2
1,0	4
1,5	3,69
2,0	3,2
2,5	2,76
3,0	2,4
3,5	2,11
4,0	1,88



2.

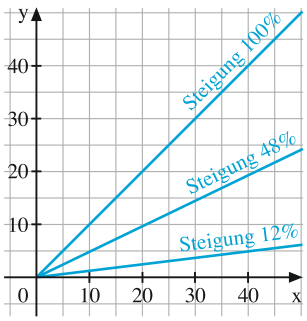


3.



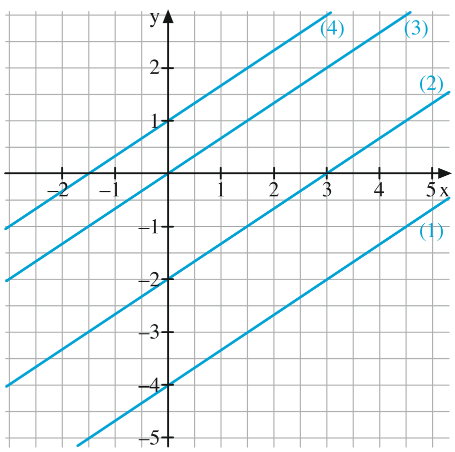
4. Die Steigung beträgt 2,75 %.

5.



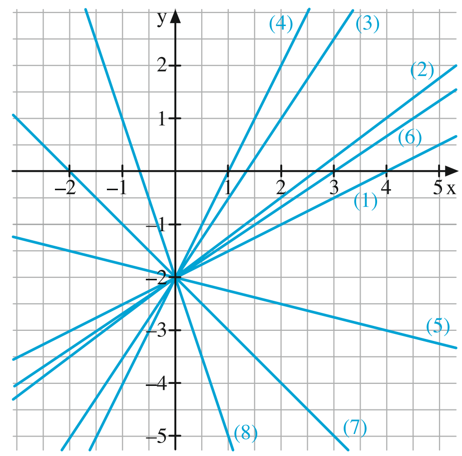
Eine Steigung von 100 % bedeutet einen Anstiegswinkel von 45°.
Im Vergleich zur üblichen Steigung ist die Steigung der Zahnradbahn viermal so steil.

6.



Die Geraden sind parallel, da sie die gleiche Steigung haben.

7.



Die Geraden verlaufen alle durch den Punkt $(0|-2)$.

Seite 20

8. (1) und (2): die Gleichung der Geraden zu (1) lautet $y = -0{,}5x + 8$ und zu (2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
Die Steigung ist also bei beiden $-\frac{1}{2}$ und stimmt mit derjenigen der Gerade g überein.

9. –

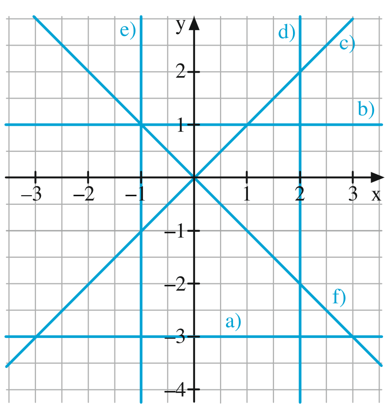
10. **a)** Auf der Geraden liegt nur P_2.
b) Auf der Geraden liegt nur P_1.
c) Keiner der Punkte liegt auf der Geraden.
d) Auf der Geraden liegt nur P_3.
e) Auf der Geraden liegt nur P_5.

11. **a)** $Q_1(2|-3)$; $Q_2(0|1)$; $Q_3(0|1)$; $Q_4(\frac{1}{2}|0)$.
b) $Q_1(2|-3)$; $Q_2(10|1)$; $Q_3(0|-4)$; $Q_4(8|0)$.

12. $y = 0{,}2x - 1{,}9$

13. $y = b$: Die Steigung ist 0, da $y = 0 \cdot x + b$.
$x = a$: Es gibt keine Steigung, denn $0 \cdot y + x = 0$ lässt sich nicht nach y auflösen.

14.

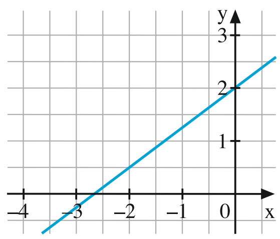


15. Gleichung der x-Achse: $y = 0$; Gleichung der y-Achse: $x = 0$.

16. (1) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ (2) $y = 3$ (3) $y = \frac{1}{3}x + 1{,}5$ (4) $x = 4$ (5) $y = 2x - \frac{1}{2}$

Seite 21

17. (1)



(2) $x = -\frac{8}{3} \approx -2{,}67$

18. a) $-\frac{1}{5}$ **b)** -4 **c)** $\frac{8}{7}$ **d)** 0 **e)** $\frac{5}{2}$ **f)** Die Funktion hat keine Nullstelle. **g)** $-1{,}5$ **h)** Die Funktion hat keine Nullstelle.

19. a) nein **b)** ja **c)** nein **d)** ja

20. a) Die Funktionsgleichung lautet $y = 15 - 0{,}15x$, wobei x die Anzahl der Gesprächsminuten bezeichnet.
b) Die Nullstelle ist $x = 100$. Das heißt, dass Tom mit dem Guthaben 100 Minuten telefonieren kann.

21. –

22. a) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ **b)** $y = 8$ **c)** $y = -\frac{5}{6}x - \frac{2}{3}$ **d)** $y = -\frac{27}{7}x - \frac{23}{7}$ **e)** $y = -0{,}4x - 3$ **f)** $y = 7x - 8{,}75$

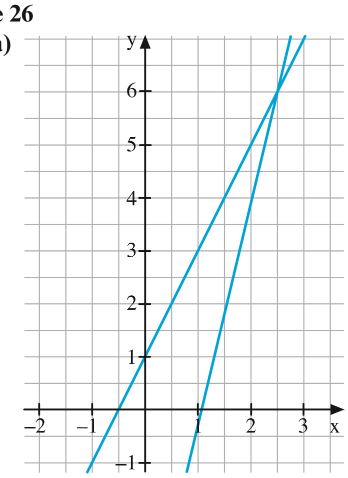
23. a) $y = -\frac{3}{5}x + 3$
b) Die Punkte A und B liegen auf der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{7}{3}x - 2$.
Wegen $0{,}3 \neq \frac{7}{3} \cdot 1 - 2 = \frac{1}{3}$ liegt der Punkt C nicht auf der Geraden (aber knapp daneben).
c) Die Punkte A und B liegen auf der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Wegen $0{,}5 \neq -\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$ liegt der Punkt C nicht auf der Geraden.
d) $y = 2$

1.3 Lineare Gleichungssysteme

1.3.2 Grafisches Lösungsverfahren – Gleichsetzungsverfahren

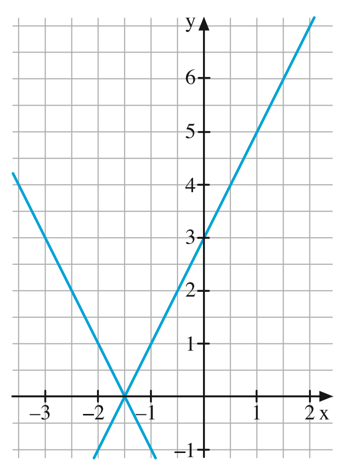
Seite 26

1. a)



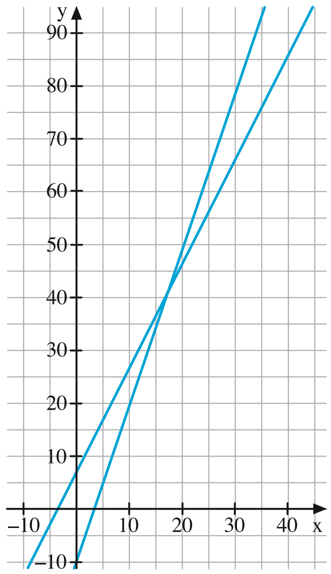
$L = \left\{\left(\frac{5}{2} \middle| 6\right)\right\}$

b)



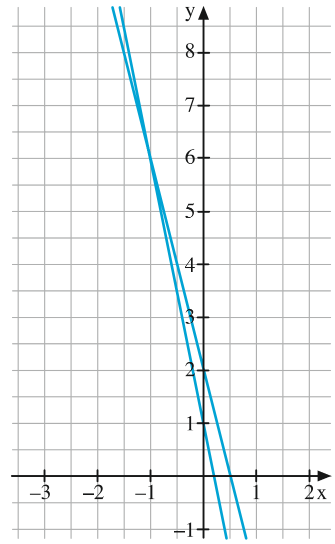
$L = \left\{\left(-\frac{3}{2} \middle| 0\right)\right\}$

c)



L = {(17|41)}

d)



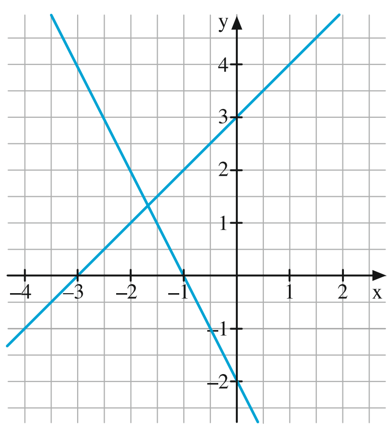
L = {(–1|6)}

2. a) Philipp hat sich bei den Vorzeichen verrechnet und die Graphen zu $y = -x$ und $y = \frac{1}{2}x - 3$ gezeichnet. Richtig ist $y = x$ und $y = \frac{1}{2}x + 3$ mit L = {(2|2)}.

b) Die erste Funktion hat Philipp richtig gezeichnet. Bei der zweiten hat er sich verrechnet. Statt $y = 2x - 3$ lautet die richtige Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$. Für die Lösungsmenge ergibt sich L = {(4|–1)}

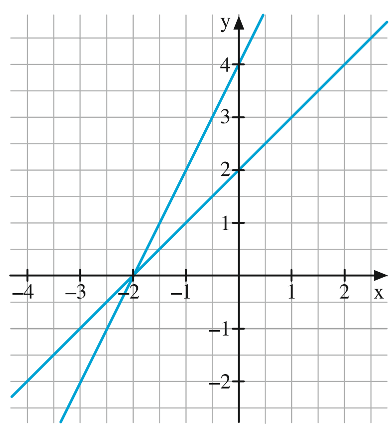
c) Philipp hat richtig gezeichnet, jedoch die Lösungsmenge falsch bestimmt. Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt (–18|8). Also ist L = {(–18|8)}.

3. a)



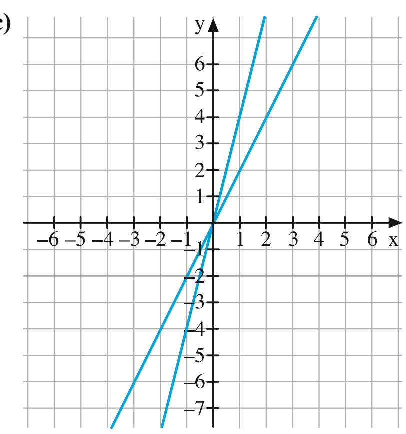
$L = \left\{\left(-\frac{5}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)\right\} \approx \{(1{,}7|1{,}3)\}$

b)



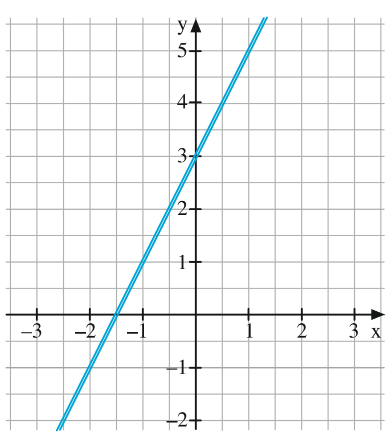
L = {(–2|0)}

c)



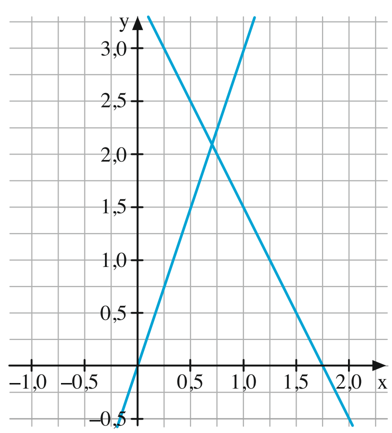
L = {(0|0)}

d)



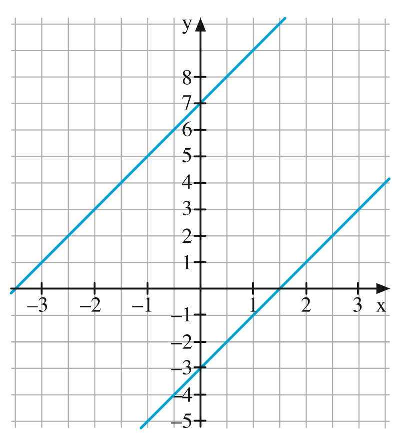
L = {(x|y)|y = 2x + 3}

e)



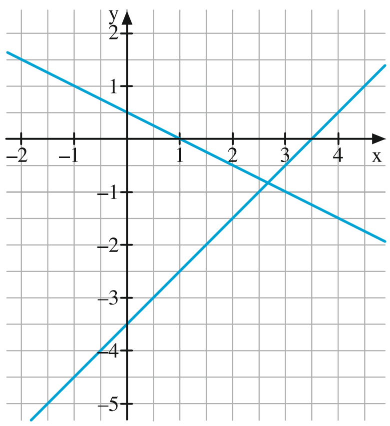
$L = \left\{\left(\frac{7}{10}\middle|\frac{21}{10}\right)\right\} = \{(0{,}7|2{,}1)\}$

f)



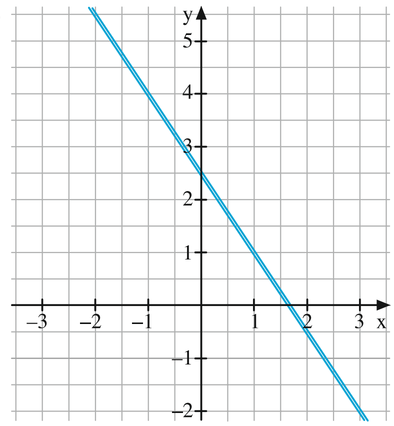
L = { }

g)



$L = \left\{\left(\frac{8}{3}\middle|-\frac{5}{6}\right)\right\} \approx \{(2{,}7|-0{,}8)\}$

h)



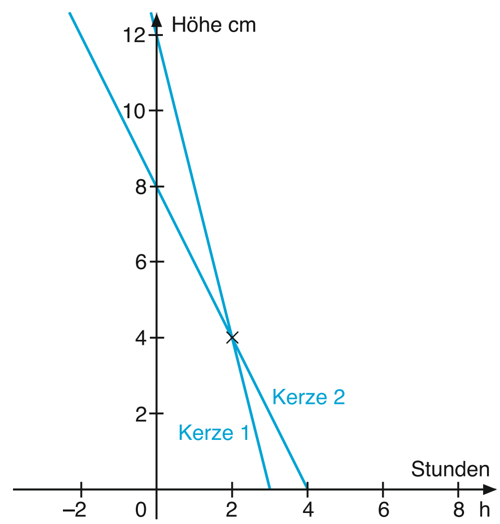
$L = \{(x|y)\,|\,y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{2}\}$

4. a) $L = \left\{\left(\frac{7}{6}\middle|-\frac{4}{3}\right)\right\}$ **c)** $L = \{(5|1)\}$ **e)** $L = \left\{\left(\frac{3}{2}\middle|10\right)\right\}$ **g)** $L = \left\{\left(-\frac{5}{3}\middle|-\frac{8}{3}\right)\right\}$

b) $L = \left\{\left(3\middle|-\frac{1}{2}\right)\right\}$ **d)** $L = \{(2|-5)\}$ **f)** $L = \{(29|11)\}$ **h)** $L = \{(5|3)\}$

5. a) $L = \{(2|1)\}$ **b)** $L = \left\{\left(\frac{6}{5}\middle|\frac{17}{5}\right)\right\}$ **c)** $L = \{(8|-4)\}$

6. Das Brenndauer-Länge-Diagramm der ersten Kerze ist durch die Punkte A(0|12) und B(3|0) gegeben, das der zweiten Kerze durch C(0|8) und D(4|0).
Die Gerade durch A und B besitzt die Gleichung $y = -4x + 12$, die durch C und D ist durch $y = -2x + 8$ beschrieben. Der Schnittpunkt ist (2|4), d. h. nach 2 Stunden sind beide 4 cm lang.



7. p: $y = 6 + 0{,}45x$; f: $y = 11 + 0{,}25x$. Bei Abnahme von 25 m³ sind beide Tarife gleich günstig: man zahlt in diesem Fall 17,25 €.

8. Mögliche Frage: Bei welchem Verbrauch sind beide Tarife gleich günstig? Der Tarif ECO-S wird beschrieben durch $y = 71{,}50 + 0{,}2416x$, ECO-L durch $y = 80{,}00 + 0{,}2184x$; $L \approx \{(366{,}379|160{,}017)\}$. Bei einem Verbrauch von ca. 366 kWh zahlt man bei beiden Tarifen ca. 160 €.

1.3.3 Einsetzungsverfahren

Seite 28

1. a) $L = \{(5|4)\}$ **b)** $L = \left\{\left(\frac{2}{3}\middle|1\right)\right\}$ **c)** $L = \left\{\left(\frac{3}{2}\middle|0\right)\right\}$ **d)** $L = \{(2|-5)\}$

2. a) Im 2. Schritt muss die erste Gleichung $2x - 3x + 4 = 3$ lauten (Minusklammer wurde nicht berücksichtigt); $L = \{1|-1\}$.
b) Der Umformungsschritt ist korrekt; $L = \{-11|13\}$.
c) Im 2. Schritt muss die erste Gleichung $2x + 3 \cdot (2 - x) = 9$ lauten; $L = \{(-3|5)\}$.

3. Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} 2x + 4y = 230 \\ x + y = 75 \end{array}\right|$; $L = \{35|40\}$. Es sind 35 Zweibett- und 40 Vierbettzimmer.

4. Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} x + y = 270 \\ 2x + 4y = 780 \end{array}\right|$; $L = \{150|120\}$. Es sind 150 Griechen und 120 Zentauren.

1.3.4 Additionsverfahren

Seite 29

1. a) $L = \{(1|2)\}$ **b)** $L = \{(2|3)\}$ **c)** $L = \{(1|1)\}$

Seite 30

2. a) $L = \{(4|2)\}$ **c)** $L = \{(1|1)\}$ **e)** $L = \{(0|1)\}$ **g)** $L = \{(0|0)\}$

b) $L = \{(0|1)\}$ **d)** $L = \{(2|1)\}$ **f)** $L = \left\{\left(\frac{1}{2}\middle|4\right)\right\}$ **h)** $L = \{(1|1)\}$

3. –

4. a) $L = \{(1|1)\}$ **b)** $L = \{\ \}$ **c)** $L = \mathbb{R}$ **d)** $L = \mathbb{R}$

5. Wieviel kostet ein Brötchen und wieviel kostet ein Orangensaft? Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} 2x + \ \ y = 2 \\ x + 2y = 2{,}5 \end{array}\right|$; $L = \{(0{,}5|1)\}$. Ein Brötchen kostet 50 Cent, ein Orangensaft 1 Euro.

6. Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} 45s + 12t = 5{,}61 \\ 32s + 15t = 4{,}83 \end{array}\right|$; $L = \{(0{,}09|0{,}13)\}$. Eine SMS kostet 9 Cent ein Telefonat 13 Cent.

7. Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} 3a + 2b = 26{,}95 \\ 5a + 2b = 36{,}93 \end{array}\right|$; $L = \{(4{,}99|5{,}99)\}$. Eine Packung Artischockensaft kostet 4,99 €, eine Flasche Brennnesselsaft 5,99 €.

1.3.5 Vermischte Übungen zum Lösen von linearen Gleichungssystemen

Seite 31

1. a) $L = \{(1|7)\}$ **c)** $L = \{(-2|1)\}$ **e)** $L = \left\{\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{1}{2}\right)\right\}$ **g)** $L = \mathbb{R}$

b) $L = \left\{\left(-\frac{1}{2}\middle|3\right)\right\}$ **d)** $L = \{(0|2)\}$ **f)** $L = \{\ \}$ **h)** $L = \left\{\left(\frac{2}{3}\middle|0\right)\right\}$

2. a) $L = \{(3|-3)\}$ **e)** $L = \{\ \}$ **i)** $L = \left\{\left(0\middle|\frac{7}{2}\right)\right\}$ **m)** $L = \{\ \}$

b) $L = \{\ \}$ **f)** $L = \{\ \}$ **j)** $L = \{(5|0)\}$ **n)** $L = \left\{\left(\frac{2}{5}\middle|0\right)\right\}$

c) $L = \mathbb{R}$ **g)** $L = \{(-1|4)\}$ **k)** $L = \{\ \}$ **o)** $L = \mathbb{R}$

d) $L = \{(5|-1)\}$ **h)** $L = \mathbb{R}$ **l)** $L = \mathbb{R}$ **p)** $L = \left\{\left(\frac{16}{13}\middle|\frac{12}{13}\right)\right\}$

3. a) Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} x - \ \ y = \ \ 98 \\ x + 4y = 153 \end{array}\right|$; $L = \{(109|11)\}$. Die erste Zahl ist 109, die zweite 11.

b) Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} x - 14 = y + 14 \\ x - 25 = 19 - y \end{array}\right|$; $L = \{(36|8)\}$. Die erste Zahl ist 36, die zweite 8.

4. Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} 9a - b = 13 \\ 15b - a = \ \ 6 \end{array}\right|$; $L = \left\{\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)\right\}$. Ein Apfel kostet 1,5 Denar, eine Birne kostet einen halben Denar.

5. Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} x + 5y = 5{,}5 \\ x + 7y = 6{,}5 \end{array}\right|$; $L = \{(3|0{,}5)\}$. Die Grundgebühr beträgt 3 Euro, der Preis pro gefahrenen Kilometer 50 Cent.

6. Wieviel muss ein Erwachsener zahlen und wieviel ein Kind? Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} 2x + 2y = 13 \\ x + 3y = 11{,}5 \end{array}\right|$; $L = \{(4|2{,}5)\}$. Ein Erwachsener zahlt 4,00 Euro, ein Kind 2,50 Euro.

7. Das Gleichungssystem lautet $\left|\begin{array}{l} x + y = 57 \\ x + 9 = 2 \cdot (y + 9) \end{array}\right|$; $L = \{(41|16)\}$. Der Vater ist 41 Jahre alt, der Sohn 16.

1.4 Aufgaben zur Vertiefung

Seite 32

1. a) Der zugehörige Term lautet $(2x + 4) : 2 - x = 2$.

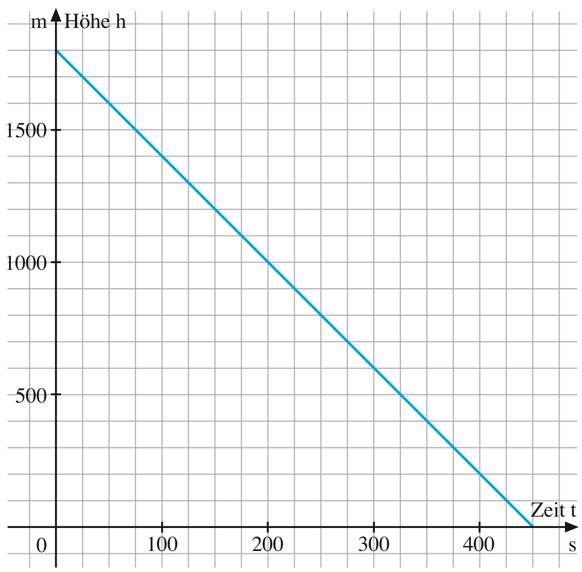
b) Der zugehörige Term lautet $(3 \cdot (x + 4) - x) : 2 = 6 + x$. Um die ursprüngliche Zahl zu ermitteln, muss man vom Ergebnis 6 abziehen.

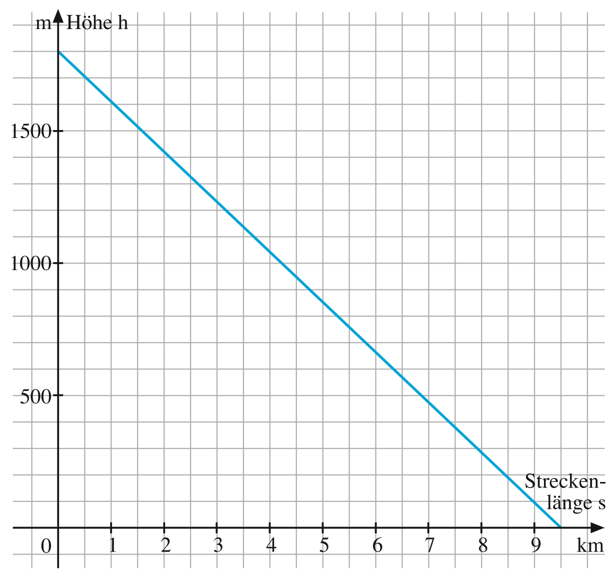
c) Der zugehörige Term lautet $2(10 - x) + x - 20 = -x$. Hier muss einfach das Vorzeichen „umgedreht“ werden.

d) –

e) –

2. a) Die Funktion Zeit t → Höhe h ist gegeben durch $h = 1800 - 4t$ (t in Sekunden, h in Metern). Aus $s = 75 \cdot t \cdot \frac{1}{3600}$ (s in Kilometern) ergibt sich für die Funktion Streckenlänge s → Höhe $h: h = 1800 - 4 \cdot 48s = 1\,800 - 192$ s. Der Faktor $\frac{1}{3600}$ dient zum Umrechnen der Einheiten (Sekunde → Stunde).

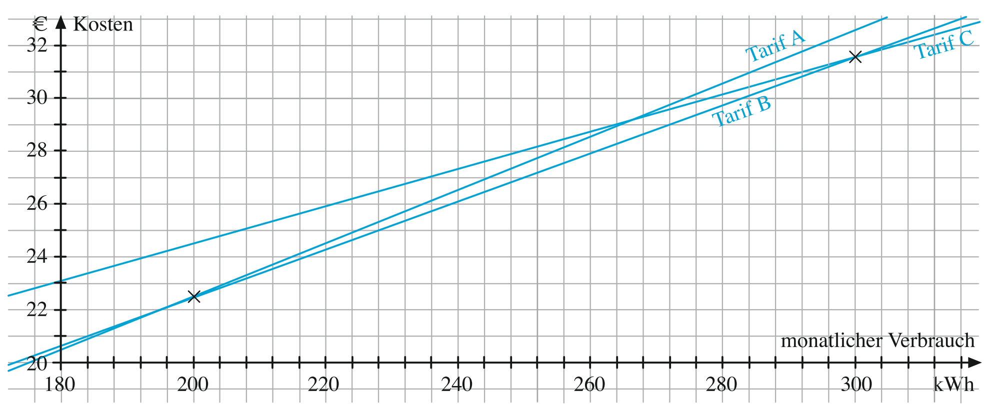




b) –
c) $h = 0$ gilt für $t = 450$ sec $= 7\frac{1}{2}$ min und $s = 9{,}375$ km.

Seite 33

3. Bezeichnet y die Kosten in Euro und x den monatlichen Verbrauch in kWh, so sind die unterschiedlichen Tarife durch folgende lineare Funktionen beschrieben: A: $y = 2{,}5 + 0{,}1x$; B: $y = 4{,}5 + 0{,}09x$ und C: $y = 10{,}5 + 0{,}07x$. Durch Berechnung der Schnittpunkte der Geraden ergibt sich dann: bis zu einem monatlichen Verbrauch von 200 kWh ist Tarif A am günstigsten, im Bereich zwischen 200 kWh und 300 kWh ist Tarif B am günstigsten. Wenn man mehr als 300 kWh im Monat verbraucht, ist Tarif C der günstigste.



4. Das zugehörige Gleichungssystem lautet $\left| \begin{array}{l} 3{,}5 \cdot \frac{1}{60} \cdot 200 = s + 3{,}5 \cdot \frac{1}{60}v \\ 2{,}5 \cdot \frac{1}{60} \cdot 200 = s - 2{,}5 \cdot \frac{1}{60}v \end{array} \right|$, wobei s die Länge der Autoschlange und v deren Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bezeichnet. Als Lösung erhält man $s = \frac{175}{18}$ km ≈ 9,72 km und $v = 33\frac{1}{3}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 33{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

5. Die Kostenfunktion für die Energiesparklasse A lautet $y = 299 + \frac{(954 - 299)}{14}x$, die für die Klasse A++ lautet $y = 410 + \frac{(766 - 410)}{14}x$, wobei x die Jahre seit der Anschaffung bezeichnet. Der Schnittpunkt liegt bei ungefähr 5,2 Jahren. Ab diesem Zeitpunkt ist ein A++-Kühlschrank bezüglich der angefallenen Gesamtkosten günstiger.

6. Die EIP-Funktionen der einzelnen Lampentypen sind ungefähr gegeben durch: Glühlampe: $y = \frac{0{,}2}{150}x$; Halogenlampe: $y = 0{,}065 + \frac{(0{,}3 - 0{,}065)}{300}x$; Fluoreszenzröhre: $y = 0{,}15 + \frac{(0{,}25 - 0{,}15)}{350}x$; Energiesparlampe: $y = 0{,}08 + \frac{(0{,}2 - 0{,}08)}{450}x$. Es ist $A \approx (75\,|\,0{,}105)$, $B \approx (118\,|\,0{,}16)$ und $C \approx (171\,|\,0{,}20)$.

2 Quadratische Funktionen und Gleichungen

2.1 Quadratische Terme und Gleichungen

2.1.2 Multiplizieren von Summen, binomische Formeln

Seite 36

1. a) $A = 21a^2$ **b)** $A = 4t \cdot 3r - rt = 11rt$ **c)** $A = a \cdot 5a + 2a \cdot 4b = 5a^2 + 8ab$

2. a) $O = 2 \cdot (3x^2 + 3xy + 3x \cdot 3y) + 2 \cdot (1{,}5x^2 + x^2) = 11x^2 + 24xy$
b) $O = 2y^2 + 4xy + 2x^2 + 2 \cdot 3xy + 2y \cdot (y - x) = 2x^2 + 8xy + 4y^2$

3. a) $2ab + 2b^2 - ac - 5bc + 2c^2$ **b)** $-2x^2 - 2x + 12$ **c)** $-3y^3 + 11y^2 - 11y + 2$
d) $-4a^2 + 9ab - 2b^2$ **e)** $x^2 - 2$ **f)** $2u^2 + 3uv - 11v^2$
g) $2u^2 + uv$ **h)** $4p^2 - 5pq - 15q^2$ **i)** $-5a^2 + 3ab$

Seite 37

4. a) $9a^2 + 12ab + 4b^2$; Zeichnung (4) **b)** $x^2 + 2x - 3$; Zeichnung (2)
c) $a^2 - 4b^2$; Zeichnung (3) **d)** $x^2 + 6x + 9$; Zeichnung (1)

5. a) $u^2 + 2uv + v^2$ **c)** $4a^2 - b^2$ **e)** $y^2 - 4$ **g)** $9x^2 - 16$ **i)** $16x^2 - \frac{1}{4}$
b) $y^2 - 6y + 9$ **d)** $4x^2 - 1{,}2xy + 0{,}09y^2$ **f)** $\frac{1}{4}s^2 - \frac{3}{4}st + \frac{9}{16}t^2$ **h)** $49a^2$

6. Maikes Vorgehen ist korrekt, Maria hat das Minus vor der Klammer nicht beachtet.

7. a) $2a^2 + 2b^2$ **b)** $-140ac$ **c)** $9 + 4x^2$ **d)** $17x^2 + 10xy + 13y^2$ **e)** $-24uv + 32v^2$ **f)** $2p^2 + 2q^2$

8. a) Falsch; korrekt ist $4x^2 - 12xy + 9y^2$ **c)** Falsch; korrekt ist $16x^2$ **e)** Falsch; korrekt ist $2x$
b) Korrekt. **d)** Falsch; korrekt ist 0 **f)** Korrekt.

9. a) $(x - 2y)^2$ **b)** $(2a + 10b)^2$ **c)** $(u - 3v)(u + 3v)$ **d)** $2(y - 4)^2$

10. t bezeichne die Zeit in Sekunden, T die Tiefe des Brunnens in Metern.
a)

t	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
T	1,25	5,0	11,25	20,0	31,25	45,0	61,25	80,0

t	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0
T	101,25	125,0	151,25	180,0	211,25	245,0	281,25	320,0

b) $T = 5t^2$.
c) Der Brunnen ist viermal so tief wie der zweite Brunnen. Gilt nämlich für die Fallzeiten t_2 und t_1 der beiden Brunnen $t_2 = 2t_1$, so ergibt sich für die Tiefen: $T_2 = 5t_2^2 = 5 \cdot (2t_1)^2 = 4 \cdot (5t_1^2) = 4T_1$.

2.1.3 Quadratische Gleichungen

Seite 39

1. a) $L = \{-3; 3\}$ **d)** $L = \{0; 3\}$ **g)** $L = \{-5; 0\}$ **j)** $L = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$
b) $L = \{-\sqrt{0{,}4}; \sqrt{0{,}4}\}$ Hinweis: die Lösung ist **nicht** $\pm 0{,}2$. **e)** $L = \{3\}$ **h)** $L = \{0; 4\}$ **k)** $L = \{2; 5\}$
c) $L = \{\ \}$ **f)** $L = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ **i)** $L = \{-3; 1\}$ **l)** $L = \left\{-2; \frac{4}{5}\right\}$

2. a) Die quadratische Gleichung $x^2 - 12 = 0$ ist korrekt. Für die Anwendung der Lösungsformel ist allerdings $p = 0$ und $q = -12$ zu setzen. (Es geht natürlich einfacher). $L = \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$.
b) Die quadratische Gleichung ist korrekt. Zur Anwendung der Lösungsformel muss die Gleichung allerdings durch 2 geteilt werden, sodass sich dann $p = -1$ und $q = -\frac{3}{2}$ ergibt. $L = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right\}$.
c) Die rechte Seite von $x \cdot (x - 2) = 3$ ist nicht 0, sodass die Faktorisierung an dieser Stelle keine Hilfe darstellt. Stattdessen muss es in der dritten Zeile lauten: $x^2 - 2x - 3 = 0$. Mit der pq-Formel ergibt sich dann $L = \{-1; 3\}$.

3. Die Gleichung lautet $x^2 + (8{,}4 - x)^2 = 36$. $L = \{3{,}6; 4{,}8\}$. Das kleine Quadrat hat die Seitenlänge 3,6 cm, das große die Seitenlänge 4,8 cm.

Seite 40

4. Die Gleichung lautet $(x - 7)^2 + 2x = (13 - x)^2 + 34$. $L = \{11\}$. Die gesuchte Zahl ist 11.

5. Die Gleichung für die Höhe h lautet $\frac{1}{2}(h + 0{,}7) \cdot h = 11{,}7$. $L = \{-5{,}2; 4{,}5\}$.
Die Höhe des Dreiecks beträgt 4,5 cm, die zugehörige Seite ist 5,2 cm lang.

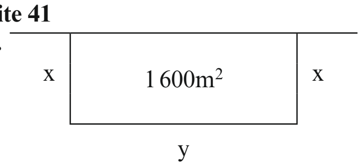
6. Das Rechteck mit den Seitenlängen x und x + 6 hat einen Flächeninhalt von 216 Einheiten.
$x^2 + 6x = 216$
$x^2 + 3x + 3x = 216$
Ein Teilrechteck mit dem Flächeninhalt 3x wird von rechts nach unten verschoben.
$x^2 + 6x + 9 = 216 + 9$
Man addiert ein *Quadrat* mit dem Flächeninhalt 9, damit ein *Quadrat* mit der Seitenlänge x + 3 entsteht. Jetzt wird die 1. binomische Formel angewendet:
$(x + 3)^2 = 225$
$x + 3 = 15$ (oder $x + 3 = -15$) $\mid -3$
$x = 12$ (oder $x = -18$)
Also $L = \{-18; 12\}$.
Antwort: Die Lösungen der Gleichung sind –18 und 12.

7. Die Gleichung für die Breite x des Weges lautet $4x^2 + 2 \cdot 50x + 2 \cdot 30x = 425$.
$L = \{-42{,}5; 2{,}5\}$. Der Weg ist 2,50 m breit.

8. Die Gleichung lautet $(x - 4) \cdot (x + 8) = x^2 + 16$. $L = \{12\}$. Das Quadrat hat eine Seitenlänge von 12 cm.

Seite 41

9.



$\left|\begin{array}{r} x \cdot y = 1\,600 \\ y = 120 - 2x \end{array}\right|$ einsetzen

$\left|\begin{array}{r} x \cdot (120 - 2x) = 1\,600 \\ y = 120 - 2x \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad x^2 - 60x + 800 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \{(40|40); (20|80)\}$

Für die Abmessungen der Weide gibt es 2 Möglichkeiten:
1. Alle Seiten sind 40 m lang.
2. Die Seite parallel zur Bergwand ist 80 m lang, die andere 20 m.

10. x und x + 1 sind die gesuchten Zahlen.
$x^2 + (x + 1)^2 = 1\,625 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 812 - 0$; $x_1 = 28$; $x_2 = -29$
Die gesuchten Zahlen sind 28 und 29 oder –29 und –28.

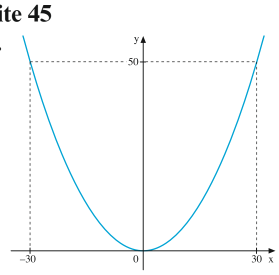
11. Die Anzahl der Affen ist x.
$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$; $L = \{48; 16\}$
In der Herde waren 48 oder 16 Affen.

2.2 Quadratische Funktionen

2.2.2 Modellieren mit quadratischen Funktionen – Strecken einer Parabel

Seite 45

1.



$y = ax^2$
$50 = a \cdot \left(\frac{60}{2}\right)^2 = 900a$
$a = \frac{1}{18} \quad \Rightarrow \quad$ Funktionsgleichung: $y = \frac{1}{18}x^2$

2. Laura setzt die Koordinaten des Punktes in die Funktionsgleichung ein. Wenn sich eine wahre Aussage ergibt, dann liegt der Punkt auf der Parabel, sonst nicht.

3. a) P liegt auf der Parabel, Q nicht: $2{,}5 \cdot (-3)^2 = 22{,}5 \neq 23$.
b) P liegt nicht auf der Parabel: $-0{,}7 \cdot 2^2 = -2{,}8 \neq -2{,}6$; Q liegt auf der Parabel.
c) P liegt nicht auf der Parabel: $\frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32 \neq 30$; Q liegt auf der Parabel.
d) Beide Punkte liegen nicht auf der Parabel, P wegen $-\frac{3}{4} \cdot 4^2 = -12 \neq 40$, Q wegen $-\frac{3}{4} \cdot (-3)^2 = -\frac{27}{4} \neq 23$.

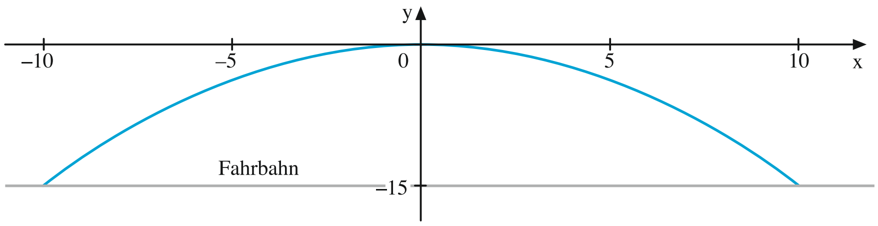
4. a) $a = 1$ **b)** $a = -0{,}2$ **c)** $a = -\frac{2}{3}$ **d)** $a = 3$

5. a) $y = 45 - \frac{45}{15\,376}x^2 \approx 45 - 0{,}0029x^2$
b) $-23 \approx 45 - 0{,}0029x^2$; $x \approx \pm 152{,}4$; damit beträgt die Breite der Brücke $\approx 2 \cdot 152{,}4 \approx 305$ m.

Seite 46

6. a), b) Der Funktionsterm $f(x) = -0{,}15x^2$ passt, wenn man das Koordinatensystem wie in der Skizze wählt:

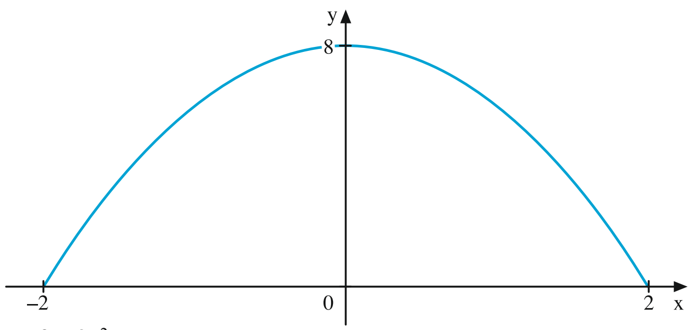
$f(10) = 0{,}15 \cdot 100 = 15$



7. Bei Bezeichnung der Textblöcke von links nach recht mit a bis e in der oberen Reihe und mit A bis E in der unteren gehören folgende Paare zusammen:
aC, bE, cA, dB, eD

8. Die Punkte $(0|192)$, $\left(-\frac{192}{2}\middle|0\right)$ und $\left(\frac{192}{2}\middle|0\right)$ liegen auf der Parabel. Daraus ergibt sich:
$y = -ax^2 + 192$
$0 = -a\left(\frac{192}{2}\right)^2 + 192 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{48}$
Also gilt für den Bogen: $y = -\frac{1}{48}x^2 + 192$

9. a)



b) $y = 8 - 2x^2$.
c) Nein, denn die Höhe bei $x = 1{,}75$ m beträgt nur ungefähr 1,88 m.

2.2.3 Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

Seite 48

1. a) ja **b)** ja **c)** ja **d)** nein **e)** ja **f)** ja

2. a) f hat den Scheitelpunkt $(-2|0)$ und ist eine um zwei Einheiten nach links verschobene Normalparabel.
b) f hat den Scheitelpunkt $(0|-4)$ und ist eine um vier Einheiten nach unten verschobene Normalparabel.
c) f hat den Scheitelpunkt $(1|0)$ und ist eine um eine Einheit nach rechts verschobene, um den Faktor $\frac{3}{4}$ gestauchte, nach unten geöffnete Parabel.
d) f hat den Scheitelpunkt $(-3|-1{,}5)$ und ist eine um drei Einheiten nach links und 1,5 Einheiten nach unten verschobene Normalparabel.

3. (1) $f(x) = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$ **(2)** $\frac{1}{2}(x + 4)^2 + 1$ **(3)** $-x^2 - 6$ **(4)** $-\frac{3}{4}(x - 3)^2 - 1$

4. a) $f(x) = (x + 1)^2$ **b)** $f(x) = (x - 4)^2 + 5$ **c)** $f(x) = (x + 3)^2 + 2$

5. a) $f(x) = -(x - 3)^2 - 1$ **b)** $f(x) = 2(x + 3)^2 + 4$ **c)** $f(x) = (x - 2)^2 - 3$ **d)** $f(x) = -0{,}75(x + 1)^2 + 2$

Seite 49

6. a) $P\left(2\middle|\frac{49}{4}\right)$ **b)** $Q\left(-\frac{3}{2}\middle|0\right)$ **c)** $R\left(-\frac{11}{2}\middle|16\right)$ oder $R\left(\frac{5}{2}\middle|16\right)$ **d)** $S\left(0\middle|\frac{9}{4}\right)$

7. a) Keiner der Punkte liegt auf der Parabel.
b) E und G liegen auf der Parabel, F nicht.
c) Nur Q liegt auf der Parabel.

8. Die Funktionsgleichung der Parabel ist $f(x) = -(x - 1)^2 + 1$. damit ergibt sich
a) Der Punkt liegt nicht auf der Parabel, da $f(3) = -3 \neq -2$ gilt.
b) $A(4|-8)$; $B(-3|-15)$; es gibt keinen Punkt C, der auf der Parabel liegt und dessen y-Koordinate 2 beträgt.

9. a) $S(0|-9)$ **b)** $S\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{25}{4}\right)$ **c)** $S(2|-10)$ **d)** $S(5|7)$ **e)** $S(1{,}5|-3)$ **f)** $S(3|0)$

10. Alessio hat richtig erkannt, dass die Bedingung zur Berechnung der Nullstellen $f(x) = 0$ lautet. Umformen und quadratische Ergänzung ergeben die Gleichung $(x-1)^2 = 2$, die durch Umformen und Ausrechnen gelöst werden kann.

11. a) $N_1(1|0)$ und $N_2(7|0)$ **b)** $N_1(6|0)$ und $N_2(-1|0)$ **c)** $N_1(-7|0)$ und $N_2(1|0)$ **d)** $N(10|0)$

12. a) $y = -(x+4{,}5)^2 + 1$; Öffnung nach unten; Scheitelstelle $-4{,}5$; Nullstellen $-3{,}5$ und $-5{,}5$
Der Graph steigt für $x \leq -4{,}5$ und fällt für $x \geq -4{,}5$; er ist oberhalb der x-Achse für $-5{,}5 < x < -3{,}5$ und unterhalb für $x < -5{,}5$ oder $x > -3{,}5$.

b) $y = 2 \cdot [(x-3)^2 - 36]$; Öffnung nach oben; Scheitelstelle bei 3; Nullstellen bei -3 und 9
Der Graph fällt für $x \leq 3$ und steigt für $x \geq 3$; er ist oberhalb der x-Achse für $x < -3$ oder $x > 9$ und unterhalb für $-3 < x < 9$.

c) $y = -x^2 + 45x - 500$; Öffnung nach unten; Scheitelstelle bei 22,5; Nullstellen bei 20 und 25
Der Graph steigt für $x \leq 22{,}5$ und fällt für $x \geq 22{,}5$; er ist oberhalb der x-Achse für $20 < x < 25$ und unterhalb für $x < 20$ oder $x > 25$.

d) $y = -8x^2 - 160x - 750$; Öffnung nach unten; Scheitelstelle bei -10; Nullstellen bei $-12{,}5$ und $-7{,}5$
Der Graph steigt für $x \leq -10$ und fällt für $x \geq -10$; er ist oberhalb der x-Achse für $-12{,}5 < x < -7{,}5$ und unterhalb für $x < -12{,}5$ oder $x > -7{,}5$.

e) $y = -0{,}6x^2 - 2{,}4x + 0{,}6$; Öffnung nach unten; Scheitelstelle bei -2; Nullstellen bei $-2-\sqrt{5}$ und $-2+\sqrt{5}$
Der Graph steigt für $x \leq -2$ und fällt für $x \geq -2$; er ist oberhalb der x-Achse für $-2-\sqrt{5} < x < -2+\sqrt{5}$ und unterhalb für $x < -2-\sqrt{5}$ oder $x > -2+\sqrt{5}$.

f) $y = 2x^2 - 20x + 70$; Öffnung nach oben
Der Scheitelpunkt $S(5|20)$ liegt oberhalb der x-Achse, deshalb gibt es keine Schnittpunkte mit der x-Achse.
Der Graph fällt für $x \leq 5$ und steigt für $x \geq 5$; er liegt vollständig oberhalb der x-Achse.

13. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 + 3$ ist eine verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(2|3)$, die nicht durch den Punkt $P(3|5)$ geht, identisch mit dem Graphen zu $g(x) = x^2 - 4x + 7$ ist, nicht durch den Ursprung geht und keinen höchsten Punkt besitzt. Die anderen Aussagen treffen nicht zu.

Seite 50

14. Die Gleichung $1{,}5x^2 - 5x + 2{,}5 = 0$ hat die Lösungen

$x_1 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{10}{9}} \approx 0{,}61$ und $x_2 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{10}{9}} \approx 2{,}72$.

Mit $f(x_1) \approx 1{,}70$ und $f(x_2) \approx -3{,}92$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(\approx 0{,}61|\approx 1{,}70)$ und $S_2(\approx 2{,}72|\approx -3{,}92)$.

15. a) $S_1(2+\sqrt{2}|1+2\sqrt{2}$ und $S_2(2-\sqrt{2}|1-2\sqrt{2})$ **b)** $S_1(1|-36)$ und $S_2(5|0)$ **c)** $S\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{13}{4}\right)$ **d)** $S_1(-2|-8)$ und $S_2(7|-35)$

16. Der Scheitelpunkt ist $S(-3|-1)$. Der Graben ist an seiner tiefsten Stelle 1 m tief.

17. Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei $(-35|36)$, d. h. die Vorderfront ist 36 m hoch und 70 m breit.

18. x-Achse längs der Bahnlinie und Koordinatenursprung im Scheitelpunkt der Parabel
Parabel: $f(x) = -0{,}08x^2$
Gerade: $g(x) = \frac{8}{35}x - \frac{120}{35}$
Gleichsetzen führt zur Gleichung $x^2 + \frac{20}{7}x - \frac{300}{7} = 0$ mit den Lösungen $x_1 \approx -8{,}13$ und $x_2 \approx 5{,}27$, woraus sich die Schnittpunkte, d. h. die Befestigungspunkte $S_1(\approx -8{,}13|\approx -5{,}29)$ und $S_2(\approx 5{,}27|\approx -2{,}22)$ ergeben (Koordinaten in m).

2.3 Aufgaben zur Vertiefung

Seite 52

1. a) Höhe des Bogens: 76 m; Breite des Bogens: 183 m.
Weitere Daten wie Baujahr, Bauzeit, Kosten lassen sich im Internet finden.

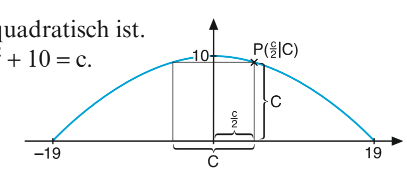
b) $f(x) = -ax^2 + 76$
$0 = -a \cdot \left(\frac{183}{2}\right)^2 + 76 \Leftrightarrow a = \frac{76}{91{,}5^2} \approx 0{,}009078$ damit ist $f(x) = -0{,}009078x^2 + 76$

c) –

d) –

2. a) Für die Parabel des Querschnitts gilt:
$f(x) = -ax^2 + bx + c$. Mit $(0|10)$ und $(19|0)$ als Punkte auf der Parabel ergibt sich die Parabelgleichung $f(x) = -\frac{10}{361}x^2 + 10$ zur Beschreibung des Hallenquerschnitts.

b) Die rechteckige Vorderfront der Gaststätte hat eine maximale Fläche, wenn sie quadratisch ist.
Mit der Festlegung wie in Grafik gilt $f\left(\frac{c}{2}\right) = c$. Daraus ergibt sich $f\left(\frac{c}{2}\right) = -\frac{10}{361} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 10 = c$.
Umformen und lösen der quadratischen Gleichung ergibt:
$-\frac{10}{361} \cdot \frac{1}{4} \cdot c^2 - c + 10 = 0$
mit $c_1 \approx 9{,}39$, $c_2 = -153{,}79$. Damit ergibt sich ein Rauminhalt von
$9{,}39\ \text{m} \cdot 9{,}39\ \text{m} \cdot 10\ \text{m} = 881{,}721\ \text{m}^3$ für die Gaststätte.



Seite 53

3. Anmerkung: Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass sich der höchste Punkt des Seiles im Ursprung befindet.
- $f(x) = 0{,}0004x^2 = 114$, also ist $x \approx \pm 533{,}85$. In einer Entfernung von etwa 534 m von den Pfeilern hängt das Brückenseil am tiefsten.
- $2 \cdot 533{,}85 \approx 1\,067$ m
- $f(375) = 56{,}25$. Es muss 56,25 m lang sein.
- $f(x) = 0{,}0004x^2 = 26$, also ist $x \approx \pm 254{,}95$. Es muss etwa 255 m entfernt eingesetzt werden.

4. Es bezeichnet a die Länge und b die Breite des zu maximierenden Rechtecks. Damit gilt für die Fläche des Rechtecks $a \cdot b$, für die Länge der innen Laufbahn $400 = \pi b + 2a$. Umstellen und einsetzen in die Flächenformel ergibt die quadratische Funktion:
$a \cdot b = a \cdot \left(\frac{400 - 2a}{\pi}\right) = \frac{-2a^2 + 400a}{\pi} = f(a)$
Die Nullstellen $f(a) = 0$ sind $(0|0)$ und $(200|0)$. Damit liegt der Scheitelpunkt und somit das Maximum der Funktion bei $a = 100$.
Durch $400 = \pi b + 100a$ folgt: $b \approx 63{,}66$.
Mit einer Länge von 100 m und einer Breite von 63,66 m ist das Spielfeld also möglichst groß.

5. Für die Einnahmen E gilt: $E = p \cdot x$, wobei p der Preis in € und x der Mitgliederzahl.
Es gilt somit: $E(x) = (9{,}5 - x) \cdot (62 + 10x)$. Die Nullstellen von E liegen bei $x = -6{,}2$ und $x = 9{,}5$, der Scheitelpunkt, und damit das Maximum der Funktion bei $x = \frac{9{,}5 - 6{,}2}{2} = 1{,}65$.
Bei einer Preissenkung um 1,65 € werden also die größtmöglichen Einnahmen erzielt.

3 Geometrie

3.1 Der Satz des Pythagoras und Ähnlichkeit

3.1.2 Der Satz des Pythagoras

Seite 56

1. a) $a^2 + b^2 = c^2$ **b)** $b^2 + c^2 = a^2$ **c)** $|DE|^2 + |EF|^2 = |DF|^2$ **d)** $|UV|^2 + |UW|^2 = |VW|^2$

2. a) $x = 3{,}5$ cm **b)** $y \approx 6{,}7$ cm **c)** $z = 8{,}4$ cm **d)** $k \approx 6{,}8$ cm

Seite 57

3. $x \approx 67{,}1$ cm und $y \approx 42{,}4$ cm.

4. Der Umfang beträgt 60 cm.

5. a) –
b) Die Abstände vom Koordinatenursprung betragen für A: 5 LE, für B: $\sqrt{13} \approx 3{,}61$ LE, für C: $\sqrt{61} \approx 7{,}81$ LE und für D: $\sqrt{32} \approx 5{,}66$ LE. (LE = Längeneinheiten)
c) Der Umfang des Dreiecks ABC beträgt ungefähr 26,67 LE, der Umfang des Vierecks ABCD beträgt ca. 32,05 LE.

6. a) $U \approx 13{,}5$ cm, $A \approx 10{,}2$ cm² **b)** $U \approx 13{,}3$ cm, $A \approx 10{,}7$ cm² **c)** $U \approx 15{,}0$ cm, $A \approx 4{,}0$ cm² **d)** $U \approx 12{,}5$ cm, $A \approx 10{,}1$ cm²

7. Die Flächendiagonalen sind $\sqrt{164}$ cm $\approx 12{,}8$ cm, $\sqrt{100}$ cm = 10 cm bzw. $\sqrt{136} \approx 11{,}7$ cm lang. Die Raumdiagonale beträgt $\sqrt{200} \approx 14{,}1$ cm.

Seite 58

8. Das Dach hat eine Höhe von ungefähr 5,66 m.

3.1.3 Ähnlichkeit – Strahlensätze

Seite 59

1. mögliche Lösungen sind
a) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{e} = \frac{b}{d}$ und $\frac{c}{e - c} = \frac{b}{d - b}$
b) $\frac{s}{c} = \frac{t}{b} = \frac{r}{s}$
c) $\frac{u}{m} = \frac{v}{n} = \frac{w}{o}$

2. a) b′ = 12 cm und c′ = 18 cm
b) a′ = 1 cm und b′ = 1,5 cm
c) b′ = 10,5 cm und c′ = 13,5 cm
d) b = c = 120 mm

3. x = 2,4

Seite 60

4. Die in der nachstehende Tabelle ergänzten Werte sind in der Regel Näherungswerte:

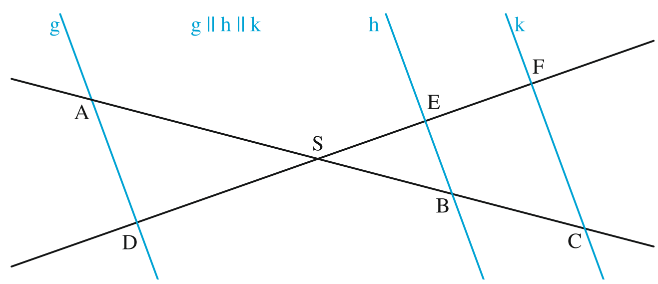
	|ZR|	|ZS|	|RS|	|RT|	|ZT|	|ZU|	|TU|	|SU|
a)	6,1 cm	9,6 cm	3,5 cm	9,9 cm	7,6 cm	11,9 cm	4,4 cm	15,6 cm
b)	6,3 cm	8,0 cm	1,7 cm	3,3 cm	5,9 cm	7,5 cm	1,6 cm	4,2 cm
c)	15,7 cm	19,2 cm	3,5 cm	11,5 cm	17,8 cm	21,8 cm	4,0 cm	14,1 cm
d)	40 mm	64 mm	24 mm	51 mm	43 mm	69 mm	26 mm	82 mm
e)	6,7 cm	12,3 cm	5,6 cm	8,9 cm	7,3 cm	13,4 cm	6,1 cm	16,3 cm
f)	46 cm	60,9 cm	14,9 cm	23,4 cm	74 cm	98 cm	24 cm	31 cm

5. Der Baum ist ungefähr 15,9 m hoch.

6. Wenn das Flugzeug den gradlinigen Steigflug 53 km fortsetzt, ist es dann auf 6 360 m Höhe.

7. a) $\frac{|SB|}{|SE|} = \frac{|SC|}{|SF|}$ **c)** $\frac{|SA|}{|AD|} = \frac{|SC|}{|CF|}$ **e)** $\frac{|AD|}{|DS|} = \frac{|BE|}{|SB|}$
b) $\frac{|SE|}{|BE|} = \frac{|SF|}{|CF|}$ **d)** $\frac{|SB|}{|BC|} = \frac{|SE|}{|EF|}$ **f)** $\frac{|CF|}{|AD|} = \frac{|SF|}{|SD|}$

(Korr.: falsche Grafik in 1. Auflage)



8. a) v = 11,2; w = 3,6; x = 4,8; y = 5,6
b) a = 10,04; b = $8\frac{2}{5}$; c = $5\frac{5}{9}$; d = $8\frac{1}{3}$, e = $5\frac{1}{3}$; f = 8,4

9. Die Breite des Flusses beträgt ungefähr 56 Meter.

10. Die Entfernung zwischen A und B beträgt 360 Meter.

11. Ansatz: die Höhe des Turms ergibt sich aus 1,6 + |EG|, wobei |EG| die Gleichung $\frac{|EG|}{2{,}4-1{,}6} = \frac{9{,}8+1{,}6}{1{,}61}$ erfüllt.
Der Turm ist 51,4 Meter hoch.

3.2 Trigonometrie

3.2.2 Sinus, Kosinus und Tangens

Seite 63

1. Korrekt sind folgende Aussagen:

a) $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ und $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$ **b)** $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ **c)** $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$ und $\tan(\beta) = \frac{h}{p}$

2. Korrekt sind folgende Aussagen:

a) $c \cdot \cos(\beta) = a$ und $c \cdot \cos(\alpha) = b$ **b)** $a \cdot \tan(\beta) = b$ und $c \cdot \cos(\alpha) = b$

Seite 64

3. a) sin (20°) ≈ 0,34; cos (25°) ≈ 0,91; tan (75°) ≈ 2 + $\sqrt{3}$ ≈ 3,73; sin (70°) ≈ 0,94; cos (80°) ≈ 0,17; tan (10°) ≈ 0,18
sin (70°) ≈ 0,94; cos (80°) ≈ 0,17; tan (10°) ≈ 0,18
b) sin (α) = 0,2, α ≈ 11,5°; cos (α) = 0,4, α ≈ 66,4°; tan (α) = 1,2, α ≈ 50,2°;
sin (α) = 0,9, α ≈ 64,2°; cos (α) = 0,7, α ≈ 45,6°; tan (α) = 0,3, α ≈ 16,7°

4. Korrekt sind folgende Aussagen:

a) β = 63°; a ≈ 3,6 cm; h ≈ 3,2 cm
b) α ≈ 21,8°; h ≈ 1,9 cm
c) b ≈ 5,5 cm

5. a) sin (α) = cos (β) ≈ 0,4382; sin (β) = cos (α) ≈ 0,8989
b) sin (α) = cos (β) ≈ 0,5077; sin (β) = cos (α) ≈ 0,8615
c) sin (α) = cos (β) ≈ 0,5283; sin (β) = cos (α) ≈ 0,8491

6. Der Steigungswinkel der Strecke von der Talstation zur Bergstation beträgt ca. 46°, der Steigungswinkel der Strecke von der Berg- zur Gipfelstation beträgt ca. 39°.

7. a) $b \approx 4{,}26$ cm; $\gamma \approx 53{,}7°$; $\beta \approx 36{,}3°$
b) $\alpha = 34°$; $a \approx 4{,}05$ cm; $c \approx 7{,}24$ cm
c) $\alpha = 20°$; $a \approx 1{,}82$ cm; $c \approx 5{,}32$ cm
d) $\beta = 66°$; $a \approx 2{,}44$ cm; $b \approx 5{,}48$ cm
e) $\alpha = 28{,}9°$; $\beta \approx 61{,}1°$; $b \approx 8{,}68$ cm
f) $\gamma = 48°$; $b \approx 5{,}49$ cm; $c \approx 6{,}09$ cm

8. $\alpha = 26°$; $AC \approx 7{,}8$ cm; $U \approx 18{,}2$ cm; $A \approx 11{,}9\ \text{cm}^2$

Seite 65

9. Die Seile müssen in ungefähr 32,8 Metern Höhe befestigt werden.

10. Die Rampe muss ungefähr 17,2 Meter lang sein.

11. Das Flachdach muss eine Höhendifferenz zwischen 70 Zentimetern und 1,75 m aufweisen.

12. Der Neigungswinkel beträgt ungefähr 62,4°.

13. Der Fluss ist ungefähr 30 m breit.

Seite 66

14. a) Der Winkel zwischen Seitenhöhe und Grundfläche beträgt ungefähr 70,9°.
b) Der Winkel zwischen zwei gegenüberliegenden Seitenflächen an der Pyramidenspitze beträgt ungefähr 38,2°.
c) Eine Seitenkante schließt mit der Grundfläche einen Winkel von ungefähr 63,9° ein.

3.3 Körper – Oberflächeninhalt und Volumen

3.3.2 Berechnungen an Körpern

Seite 70

1. a)

1. a)	(1) 700 mm²	(4) 1 300 m²	(7) 99 cm²	(10) 200 dm²
	(2) 2 700 cm²	(5) 51 100 a	(8) 550 km²	(11) 2 m²
	(3) 1 500 dm²	(6) 600 ha	(9) 79 a	(12) 78 km²
b)	(1) 8 000 mm³	(4) 35 dm³	(7) 99 cm³	(10) 40 dm³
	(2) 73 000 cm³	(5) 91 100 ℓ	(8) 370 hl	(11) 7 000 ℓ
	(3) 35 000 dm³	(6) $3 \cdot 10^{10}$ hl	(9) 93 ℓ	(12) 18 000 m³

2. Das Volumen des Eisenträgers beträgt 496,8 dm³. Er hat somit eine Masse von ungefähr 3,68 t.

3. Die Schokolade hat ein Volumen von ungefähr 58,5 cm³.

4. Zur Herstellung des Ofenrohrs werden ca. 0,79 m² Eisenblech benötigt.

5. $V \approx 51{,}081 \cdot 10^{12}\ \text{km}^2 = 1\,081\,000\,000\,000\ \text{km}^3$

6. a) Die Regenrinne ist ungefähr 19,5 m lang.
b) Die Mantelfläche hat einen Flächeninhalt von 107,1 m².
c) Das Dach umschließt einen Raum von 106,2 m³.

7. a) △ABC und △MCS und
b) k ist ungefähr 37,84 m lang

8. Die Kerze hat ungefähr ein Volumen von 8 cm³ und einen Oberflächeninhalt von 231,7 cm².

9. Die Wurst hat ein Volumen von ungefähr 120,6 cm³.

Seite 71

10. Der Mayon hat an seiner Basis einen Durchmesser von ca. 19,5 km. Der Oberflächeninhalt seiner Mantelfläche beträgt ungefähr 309,4 km². Er hat ein Volumen von ca. 246 km³. Der kürzeste Weg von unten bis zur Spitze beträgt ca. 10,1 km.

11. Es werden ungefähr 38,6 m² Leder benötigt.

12. Die Angaben für Höhe und Seitenlänge liefern ein Volumen von ca. 2,59 Millionen m³ und eine Mantelfläche mit einem Flächeninhalt von ca. 85 900 m². Sie sind also mit den zusätzlich gegebenen Daten verträglich.

13. a) $a = \sqrt[3]{V}$, wobei a die Seitenlänge und V das Volumen des Würfels bezeichnet: a = 2,6 cm.

b) $a = \frac{\sqrt{A_O}}{6}$, wobei a die Seitenlänge und A_O den Flächeninhalt der Mantelfläche des Würfels bezeichnet: a = 7,8 cm.

c) $r = \sqrt{\frac{A_O}{4\pi}}$, wobei r den Radius und A_O den Oberflächeninhalt der Kugel bezeichnet: r ≈ 0,9 cm.

d) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, wobei r den Radius und V das Volumen der Kugel bezeichnet: r ≈ 7,8 cm.

14. Das Wasser steigt ungefähr 60 cm hoch.

15. Das Tröpfchen der Seifenlösung hat ein Volumen von ungefähr 14,14 mm^3.
Die Haut der Seifenblase hat somit eine Dicke von ca. 0,003 mm.

16. Der Radius der Kugeln beträgt ungefähr 2,1 cm.

Seite 72

17. Der Deich ist an seiner Basis ca. 23,9 m breit. Er hat ungefähr ein Volumen von 11 571 m^3.

18. a) Zur Herstellung benötigt man ca. 8,5 m^3 Beton. **b)** Die Rampe ist ungefähr 73 cm hoch.

3.4 Aufgaben zur Vertiefung

Seite 73

1. $\overline{AB}$ = 290 m; $\overline{ED}$ ≈ 180 m; $\overline{EC}$ ≈ 335 m. (Hinweis: Berechne die Längen in folgender Reihenfolge: |AE|, |AF|, |FG|, |ECI|)

2. $\alpha = 50°$; b ≈ 2,9 cm; c ≈ 7,9 cm

3. a) Die Winkel zwischen den Höhen der Pyramidenseiten und der Grundfläche betragen 60°.
Der Winkel zwischen gegenüberliegenden Seitenhöhen beträgt 60°. Eine Seitenkante schließt mit der Grundfläche einen Winkel von ca. 50,8° ein.

b) Eine Seitenkante ist ca. 40,25 m lang, das Volumen beträgt 13 468 m^3, und der Oberflächeninhalt (mit Grundfläche) 3 888 m^2.

4. a) Der Flächeninhalt der Dachfläche beträgt 84,85 m^2. Man benötigt daher ungefähr 850 Dachziegel. Diese wiegen 3 910 kg.

b) Zur Berechnung des Volumens ist es hilfreich, das Dach in drei Teile zu zerlegen, indem man das 4 m lange Prisma mit dreieckiger Grundfläche herausschneidet. Die beiden Endstücke können dann zu einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche zusammengefügt werden. Als Volumen ergibt sich somit $V = (\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6^2)\ m^3 = 72\ m^3$.

c) Der Neigungswinkel beträgt jeweils 45°.

5. a) Der obere Teil des Ballons kann näherungsweise als Halbkugel mit Volumen $V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ beschrieben werden, der untere Teil als Kegel mit dem Volumen $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$. Daraus ergibt sich:
$V_{Ballon} = V_{Halbkugel} + V_{Kegel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

b) $V_{Ballon} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (40\ cm)^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (40\ cm)^2 \cdot 50\ cm$
$\approx 134\,041\ cm^3 + 83\,776\ cm^3$
$= 217\,817\ cm^3 = 217{,}817\ dm^3 \approx 0{,}218\ m^3$